DM 6
Calcul de $\zeta(2)$

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 19 Mars 2024

L'objectif de ce problème est de calculer la valeur de $\zeta(2)$ définie par

$$\zeta(2) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}((X+i)^n - (X-i)^n)$$

1. Premières propriétés.
   (a) Déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
   (c) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Étudier la parité du polynôme P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Détermination des racines.
   (a) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ et $|z-i| = |z+i|$, alors $z \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, tous les polynômes P_n n'ont que des racines réelles (sans les calculer).
   (c) En déduire alors que $\forall n \geq 2$, P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Pour tout $n \geq 2$, résoudre l'équation $\widetilde{P_n}(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   (e) Retrouver le fait que P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et donner sa factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Étude d'une suite.

   On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

   (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera $\zeta(2)$ sa limite.
   (b) Déduire de la question précédente que que $\forall n \geq 1$, $|\zeta(2) - u_n| \leq \frac{1}{n}$.
4. Calcul d'une somme.
   (a) Soit $S \in \mathbb{R}[X]$. Prouver :

$$S \text{ est paire } \iff \exists! R \in \mathbb{R}[X],\ S(X) = R(X^2)$$

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! R_n \in \mathbb{R}[X]$, tel que

$$P_{2n+1}(X) = R_n(X^2)$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quel est le degré d_n du polynôme R_n ? Donner le coefficient de X^{d_n} et X^{d_n-1} de R_n.

(d) Déterminer les racines de R_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner sa factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

(e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\frac{k\pi}{2n+1})^2}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^2} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

5. Calcul de $\zeta(2)$.

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n(k) = \frac{k\pi}{2n+1}$.

(a) Montrer que $\forall \theta \in]0, \pi/2[$,

$$0 < \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)$$

(b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\cos(\theta_n(p))^2}{\sin(\theta_n(p))^2} \leq \frac{1}{\theta_n(p)^2} \leq 1 + \frac{\cos(\theta_n(p))^2}{\sin(\theta_n(p))^2}$$

(c) En déduire un encadrement de u_n pour $n \geq 1$ puis la valeur de $\zeta(2)$.