NOM :
Prénom :

Mardi 12 Mars 2024

Lycée Loges

# Interrogation 19

## Polynômes 2

## Correction

**Exercice 1 :**
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'un polynôme scindé.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$. $P$ est dit scindé s'il est produit de polynômes de degré 1, *i.e.* si $\exists a \in \mathbb{K}^*$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $\exists m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P(X) = a \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{m_k}$.
2. Caractérisation de la multiplicité par les dérivées.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors $a$ est une racine de $P$ de multiplicité $m$ si, et seulement si, $\forall k \in \{0, \dots, m-1\}$, $\widetilde{P^{(k)}}(a) = 0$.
3. Théorème de D'Alembert-Gauss.
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.
4. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant $< 0$.
5. Définition des polynômes interpolateur de Lagrange.
Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On définie les polynômes interpolateurs de Lagrange $L_0, \dots, L_n$ en $(x_0, \dots, x_n)$ par
$$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}.$$
6. Relations coefficients/racines (générale).
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé. Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ les racines de $P$ comptés avec multiplicité. Alors
$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$
7. Propriétés des polynômes interpolateur de Lagrange.
Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $L_0, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange en $(x_0, \dots, x_n)$. Alors $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(L_k) = n$ ; $\forall i, j \in \{0, \dots, n\}$, $\widetilde{L_i}(x_j) = \delta_{i,j}$ et $(L_0, \dots, L_n)$ base de $\mathbb{K}_n[X]$.
8. Caractérisation de la multiplicité par la divisibilité.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$. Alors $a$ est une racine de $P$ de multiplicité $m$ ssi $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^m Q(X)$ et $\widetilde{Q}(a) \neq 0$.

**Exercice 2 :**

Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 1 \end{cases}$

On commence par manipuler le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{yz + xz + xy}{xyz} = 1 \\ \frac{z + y + x}{xyz} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{xy+xz+yz}{xyz}=1 \\ xyz=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+xz+yz=1 \\ xyz=1 \end{cases}$$

Donc, par relation coefficients racines, $(x, y, z)$ est solution du système si, et seulement si, $x, y, z$ sont racines de $P(X) = (X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - X^2 + X - 1$.

Or $P(X) = X^2(X-1) + (X-1) = (X^2-1)(X-1) = (X-1)^2(X+1)$. Donc

$$(x, y, z) \in \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}.$$