Chapitre 18 - TD : Développements Limités

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

12 mars 2024

1 DL

Exercice 1 :
Déterminer les DL des fonctions indiqués au points indiqués et à l'ordre indiqués. Bref, faire ce qu'on demande.

1. $\mathrm{DL}_4(1)$: $\frac{\ln x}{x^2}$
2. $\mathrm{DL}_5(0)$: $\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}(x)$
3. $\mathrm{DL}_3(0)$: $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
4. $\mathrm{DL}_3(1)$: $\cos(\ln(x))$
5. $\mathrm{DL}_3(0)$: $\sqrt{3+\cos x}$
6. $\mathrm{DL}_3(0)$: $\ln(1+\sqrt{1+x})$
7. $\mathrm{DL}_2(0)$: $(1+x)^{1/x}$
8. $\mathrm{DL}_3(0)$: $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
9. $\mathrm{DL}_2(0)$: $\frac{\arctan x}{\tan x}$
10. $\mathrm{DL}_2(0)$: $\frac{\sin x}{e^x-1}$
11. $\mathrm{DL}_3(1)$: $\frac{x-1}{\ln(x)}$
12. $\mathrm{DL}_4(0)$: $\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right)$
13. $\mathrm{DL}_4(0)$: $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$
14. $\mathrm{DL}_3(0)$: $\ln(2+\sin(x))$
15. $\mathrm{DL}_3(0)$: $\ln(1+e^x)$
16. $\mathrm{DL}_6(\pi)$: $\ln(2+\cos(x))$
17. $\mathrm{DL}_3(0)$: $\frac{x\,\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x-1}$
18. $\mathrm{DL}_3(0)$: $\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$
19. $\mathrm{DL}_4(0)$: $e^{\cos x}$
20. $\mathrm{DL}_7(0)$: $x(2+\cos x)-3\sin x$
21. $\mathrm{DL}_5(a)$: x^a-a^a
22. $\mathrm{DL}_7(0)$: $\arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$
23. $\mathrm{DL}_2(0)$: $\frac{\cos(\sin(x))-\cos(x)}{x^4}$
24. $\mathrm{DL}_3(\pi/2)$: $\frac{1+\ln(\sin(x))-\sin(x)}{\cos(x)^4}$

Exercice 2 :
Déterminer les DL des fonctions suivantes :

1. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto (1+\arctan x)^{\frac{x}{\sin(x)^2}}$
2. $\mathrm{DL}_2(a)$ de $x \mapsto \frac{x^a-a^x}{\arctan(x)-\arctan(a)}$.

3. $\mathrm{DL}_2(2)$ de $x \mapsto \left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{\frac{1}{2-x}}$.
4. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \frac{e^{1-\sin(x)}-e^{1-\tan(x)}}{\tan(x)-\sin(x)}$.

Exercice 3 :
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\ln(e^x-1)}}$
2. $\lim_{x\to +\infty} x\left(\arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)\right)$
3. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$
4. $\lim_{x\to 0} \sin(x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x))-\cos(x))}{1-\cos(\sin(x^2))}$

Exercice 4 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de
$$x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right)$

Exercice 5 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.

Exercice 6 :
Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$ admet une réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $\mathrm{DL}_5(0)$ de f^{-1}.
On utilisera le fait que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7 :
Déterminer les réels a, b tels que
$$f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$
ait une partie principale en 0 la plus petite possible (donc d'un ordre le plus grand possible).

2 Théorème satanique, le retour !

Exercice 8 :
Soit $f :]-1,0[\cup]0,+\infty[$ définie par
$$f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$
Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0. Montrer alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$. Quelle est la position relative de f par rapport à sa tangente en 0 ?

Exercice 9 (sinus cardinal) :
On définit le sinus cardinal, noté sinc, par $\mathrm{sinc} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

Montrer que φ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, bornée dont le maximum est atteint en 0 et qui vaut 1.

Le sinus cardinal est une fonction classique qui intervient beaucoup en physique.

Exercice 10 :
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\tan(x) - x}{x^3}$$

peut être prolongée en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 11 (Exemple de fonction non nulle ayant un $\mathrm{DL}_n(0)$ nul) :
Soit la fonction

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 :
soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est continue en 0
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Étudier les variations de f
4. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(1)$ de f
5. Préciser l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$.

Exercice 13 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$.

1. Donner le domaine de définition de f_n.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$, f_n est prolongeable par continuité en $k\pi$. On considérera f_n ainsi prolongée.
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$, f_n est dérivable en $k\pi$ et donner sa dérivée en ce point.
4. Étudier la parité de f_n.
5. Étudier la périodicité de f_n.
6. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$.
7. Étudier les maximums de $|f_n|$.
8. Montrer que la largeur des pics d'extremums sont de plus en plus fins en fonction de n (on appelle pic la distance entre les deux zéros de f_n encadrant un extremum). Autrement dit, montrer que la largeur des pics tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.