DS 8
Arithmétique - Polynômes
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 6 Mars 2024

Problème 1 (Arithmétique : Entiers parfaits) :

Partie 1 : Généralités

1. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $d \in \mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(m)$. Donc $d|n$ et $d|m$. Donc, par caractérisation du pgcd par la divisibilité, $d|(n \wedge m)$. Et donc $d \in \mathrm{Div}(n \wedge m)$. Donc $\mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(m) \subset \mathrm{Div}(n \wedge m)$.

Inversement, soit $d \in \mathrm{Div}(n \wedge m)$. Alors $d|(n \wedge m)$. Mais $(n \wedge m)|n$ et $(n \wedge m)|m$ par définition du pgcd. Donc, par transitivité de la relation de divisibilité, $d|n$ et $d|m$. Et donc, par définition, $d \in \mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(m)$. Donc $\mathrm{Div}(n \wedge m) \subset \mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(m)$. Et donc l'égalité.

C'est directe : par définition, $\mathcal{P}_n = \mathrm{Div}(n) \cap \mathcal{P}$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_m &= (\mathrm{Div}(n) \cap \mathcal{P}) \cap (\mathrm{Div}(m) \cap \mathcal{P}) && \text{def} \\
&= (\mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(m)) \cap \mathcal{P} && \text{comm et asso de } \cap \\
&= \mathrm{Div}(n \wedge m) \cap \mathcal{P} && \text{cf au dessus} \\
&= \mathcal{P}_{n \wedge m} && \text{def } \mathcal{P}_{n \wedge m}
\end{aligned}$$

(b) Soit $p \in \mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}_m$. Alors $p|n$ par définition. Mais $n|(n \vee m)$ par définition du ppcm. Donc, par transitivité, $p \in \mathrm{Div}(n \vee m)$. Or p est premier, donc $p \in \mathcal{P}_{n \vee m}$. Et donc $\mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_{n \vee m}$ (en fait, on a même $\mathrm{Div}(n) \cup \mathrm{Div}(m) \subset \mathrm{Div}(n \vee m)$).

Soit $p \in \mathcal{P}_{n \vee m}$. Alors $p|(n \vee m)$. Or nm est un multiple commune de n et m, donc par caractérisation du ppcm, $(n \vee m)|nm$. Et donc aussi par transitivité, $p|nm$. Or p est premier, donc par le lemme d'Euclide, $p|n$ ou $p|m$. De plus, $p \in \mathcal{P}$, donc $p \in \mathcal{P}_n$ ou $p \in \mathcal{P}_m$. Et donc, par définition de la réunion, $p \in \mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}_m$. D'où $\mathcal{P}_{n \vee m} = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}_m$.

Remarque :
En général, on a seulement $\mathrm{Div}(n) \cup \mathrm{Div}(m) \subsetneq \mathrm{Div}(n \vee m)$ car $n \vee m$ n'est pas un diviseur de n ou m.

(c) Supposons $n \wedge m = 1$.

On a sait déjà $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{n \wedge m} = \mathcal{P}_1$. Mais $\mathcal{P}_1 = \{p \in \mathcal{P},\ p|1\} = \emptyset$. Donc $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_m = \emptyset$. Et donc $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_m$ sont disjoints. Donc $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_m$ forment une partition de $\mathcal{P}_{n \vee m} = \mathcal{P}_{nm}$.

2. Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge b = 1$. Soit $d = a \wedge c$. Alors $d|a$ et $d|c|bc$ donc $d|a$ et $d|bc$ donc $d|(a \wedge (bc))$. Donc $(a \wedge c)|(a \wedge (bc))$.

Soit $d = (a \wedge (bc))$. Alors $d|a$. Mais $a \wedge b = 1$. Donc $d \wedge b = 1$. Or $d|bc$ par définition du pgcd. Donc, par le lemme de Gauss, $d|c$. Et donc $d|(a \wedge c)$ par caractérisation du pgcd par la divisibilité. Donc $(a \wedge c)|(a \wedge (bc))$ et $(a \wedge (bc))|(a \wedge c)$. Comme un pgcd est positif, on en déduit $a \wedge c = a \wedge (bc)$.

En utilisant la relation de Bézout, $\exists n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge c = an + cm$ et $b \wedge c = bp + cq$. Donc

$$(a \wedge c)(b \wedge b) = (an + cm)(bp + cq) = abnp + c(mbp + cmq + anq)$$

Or $((ab) \wedge c)|(ab)$ et $((ab) \wedge c)|c$ par définition, donc $(ab) \wedge c$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de ab et c donc $((ab) \wedge c)|(abnp + c(mbp + cmq + anq))$ et donc $((ab) \wedge c)|(a \wedge c)(b \wedge c)$.

De plus, $(a \wedge c)|a$ par définition, donc $(a \wedge c)|ab$. Et $(a \wedge c)|c$, donc par caractérisation du pgcd par la divisibilité, $(a \wedge c)|((ab) \wedge c)$. De même $(b \wedge c)|((ab) \wedge c)$ par symétrie du raisonnement en a et b (on peut échanger a et b) dans le raisonnement. D'autre part, $a \wedge b = 1$ et $(a \wedge c)|a$ et $(b \wedge c)|b$. Donc $(a \wedge c)$ et $(b \wedge c)$ sont premiers entre eux. Comme ce sont des diviseurs de $(ab) \wedge c$, on en déduit $(a \wedge c)(b \wedge c)|((ab) \wedge c)$.

Par positivité des pgcd, on en déduit donc $(a \wedge c)(b \wedge c) = (ab) \wedge c$.

3. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. On pose

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(n) \times \mathrm{Div}(m) & \to & \mathrm{Div}(nm) \\ (d, \delta) & \mapsto & d\delta \end{array} \quad \text{et} \quad \xi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(nm) & \to & \mathrm{Div}(n) \times \mathrm{Div}(m) \\ d & \mapsto & (d \wedge n, d \wedge m) \end{array}$$

On va commencer par montrer que ces applications sont bien définies (qu'elles ont un sens).

Soit $(d, \delta) \in \mathrm{Div}(n) \times \mathrm{Div}(m)$. Comme $n \wedge m = 1$, on a également $d \wedge \delta = 1$. Or, par transitivité de la relation de divisibilité, $d|nm$ et $\delta|nm$. Donc $d\delta|nm$. Donc ψ est bien définie.

C'est plus clair pour ξ, il n'y a pas de problème.

Calculons :

$$\begin{aligned} \forall d \in \mathrm{Div}(nm),\ \psi \circ \xi(d) &= \psi(d \wedge n, d \wedge m) && \text{def } \xi \\ &= (d \wedge n)(d \wedge m) && \text{def } \psi \\ &= d \wedge (nm) && \text{car } n \wedge m = 1 \text{ et } 3 \\ &= d && \text{car } d|nm \end{aligned}$$

Donc $\psi \circ \xi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Div}(nm)}$.

$$\begin{aligned} \forall (d, \delta) \in \mathrm{Div}(n) \times \mathrm{Div}(m),\ \xi \circ \psi(d, \delta) &= \xi(d\delta) && \text{def } \psi \\ &= ((d\delta) \wedge n, (d\delta) \wedge m) && \text{def } \xi \\ &= (d \wedge n, \delta \wedge m) && \text{cf } 3 \\ &= (d, \delta) && \text{car } d|n,\ \delta|m \end{aligned}$$

Donc $\xi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Div}(n) \times \mathrm{Div}(m)}$. Et donc, par caractérisation de la bijectivité, ξ et ψ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

4. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ arithmétique multiplicative.

(a) On va faire une récurrence sur r. Pour $r = 1$, il n'y a rien à faire. Pour $r = 2$, c'est évident par définition de f. Supposons $\exists r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall (n_1, \dots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ deux à deux premiers entre eux, $f(\prod_{k=1}^r n_k) = \prod_{k=1}^r f(n_k)$.

Soit $(n_1, \dots, n_{r+1}) \in (\mathbb{N}^*)^{r+1}$ des entiers deux à deux premiers entre eux. Alors

$$\left(\prod_{k=1}^r n_k \right) \wedge n_{r+1} = 1.$$

En effet, si on pose $d = n_{r+1} \wedge \prod_{k=1}^r n_k$, alors $d|n_{r+1}$ et $d|n_1$ en particulier. Or $n_{r+1} \wedge n_1 = 1$ par hypothèse. Et donc $d = 1$. Donc n_{r+1} et $\prod_{k=1}^r n_k$ sont premier entre eux. D'où

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{k=1}^{r+1} n_k \right) &= f\left(\prod_{k=1}^r n_k \right) f(n_{r+1}) && \text{car } f \text{ arithmétique} \\ &= \left(\prod_{k=1}^r f(n_k) \right) f(n_{r+1}) && \text{HR} \end{aligned}$$

$$= \prod_{k=1}^{r+1} f(n_k) \qquad \text{associativité du produit dans } \mathbb{C}$$

Et donc, par principe de récurrence, on a montré que $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\forall (n_1, \dots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ deux à deux premiers entre eux,

$$f\left(\prod_{k=1}^{r} n_k\right) = \prod_{k=1}^{r} f(n_k).$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, il n'y a rien à faire ($f(1) = 1$). Supposons $n \geq 2$. Alors, par théorème fondamental de l'arithmétique, $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists p_1, \dots, p_r \in \mathcal{P}$ avec $p_1 < \cdots < p_r$, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}.$$

Mais les entiers $(p_1, \dots, p_r)$ sont deux à deux distincts. Et donc, comme ils sont premiers, ils sont deux à deux premiers entre eux. Puis, $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$, $p_i^{\alpha_i} \wedge p_j^{\alpha_j} = 1$. En effet, le pgcd est un diviseurs communs de p_i et p_j puisque ce sont des nombres premiers. Mais comme ils sont distincts, ils sont premiers entre eux. Et donc, d'après la question précédente, on en déduit

$$f(n) = f\left(\prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}\right) = \prod_{k=1}^{r} f(p_k^{\alpha_k}).$$

Donc connaître les $f(p^k)$ pour tout $(p, k) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}^*$ permet de reconstituer tous les $f(n)$ pour tout $n \geq 2$, et donc de connaître f complètement. Inversement, si on connaît f, on connaît bien sûr tous les $f(p^k)$ pour tout $(p, k) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}^*$.

Finalement, f est bien entièrement déterminée par $\{f(p^k),\ (p, k) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}^*\}$ puisque $f(1)$ est connue d'office.

Partie 2 : Les entiers parfaits

On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

5. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors

$$\begin{aligned}
\sigma(nm) &= \sum_{d|nm} d && \text{def } \sigma \\
&= \sum_{d \in \mathrm{Div}(nm)} \psi(\xi(d))) \\
&= \sum_{(d,\delta) \in \mathrm{Div}(n) \times \mathrm{Div}(m)} d\delta && \text{cf bij de } \psi \\
&= \sum_{d|n} \sum_{\delta|m} d\delta \\
&= \left(\sum_{d|n} d\right)\left(\sum_{\delta|m} \delta\right) \\
&= \sigma(n)\sigma(m)
\end{aligned}$$

Donc σ est une fonction arithmétique multiplicative.

6. (a) Soit $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathrm{Div}(p^k) = \{1, p, p^2, \dots, p^k\}$. Donc

$$\sigma(p^k) = \sum_{j=0}^{k} p^j = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

par somme géométrique de raison $p \geq 2$.

(b) Soit $n \geq 2$. σ étant multiplicative, elle est entièrement déterminée par les $\sigma(p^k)$ pour $(p,k) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}^*$ que nous avons calculés à la question précédente. D'après la théorème fondamental de l'arithmétique, on a $n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{v_p(n)}$. Et donc

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= \sigma\left(\prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{v_p(n)}\right) \\
&= \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sigma(p^{v_p(n)}) && \text{cf } 4a \\
&= \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{p^{v_p(n)+1} - 1}{p-1} && \text{cf question précédente}
\end{aligned}$$

(c) On a $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$. Donc

$$\begin{aligned}
\sigma(2024) &= \frac{2^4 - 1}{2-1} \times \frac{11^2 - 1}{11 - 1} \times \frac{23^2 - 1}{23 - 1} \\
&= 15 \times (11+1) \times (23+1) \\
&= 15 \times 12 \times 24 \\
&= 4320
\end{aligned}$$

7. On dit que $n \geq 2$ est parfait si $\sigma(n) = 2n$. Autrement dit s'il est la somme de ses diviseurs propres.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^k - 1 \in \mathcal{P}$. Alors $2^k - 1 > 1 \iff 2^k > 2 \iff k > 1$. Donc $k \geq 2$.

On pose $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$. Comme $k \geq 2$, on a $k - 1 \geq 1$ et donc $2|n$. Donc n est pair. Et de plus, $2^k - 1 \geq 2$, donc $n \geq 4$.

n est donné sous sa forme de produit de facteurs premiers et donc, d'après la question 7b, puisque $n \geq 2$,

$$\sigma(n) = \frac{(2^k - 1)^2 - 1}{2^k - 2} \times \frac{2^k - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2k} - 2^{k+1}}{2^k - 2}(2^k - 1) = \frac{2^k(2^k - 2)(2^k - 1)}{2^k - 2} = 2^k(2^k - 1) = 2n$$

Donc n est parfait.

(b) Soit $n \geq 2$ parfait et pair.

i. on pose $m = v_2(n)$. Donc $n = 2^m k$ et $2 \not| k$ par définition de la valuation 2-adique. Donc k est impair. Donc $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2q + 1$. Donc $n = 2^m(2q + 1)$.

Si $m = 0$, alors n n'est pas pair. ☠. Donc $m \geq 1$. Si $q = 0$, alors $n = 2^m$. Mais dans ce cas,

$$\sigma(n) = \sigma(2^m) = \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} = 2^{m+1} - 1 \neq 2^{m+1} = 2n$$

et donc n ne serait as parfait ☠. Donc $q \geq 1$.

Donc $\exists m, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = 2^m q$ avec q impair.

ii. On a $n = 2^m q$. Or q est impair. Donc $2 \wedge q = 1$. Et donc $2^m \wedge q = 1$. Or σ est multiplicative, donc

$$\sigma(n) = \sigma(2^m q) = \sigma(2^m)\sigma(q) = \sigma(q)\frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} = \sigma(q)(2^{m+1} - 1).$$

Mais n est parfait par hypothèse, donc $\sigma(n) = 2n = 2^{m+1}q$. Donc, par transitivité de l'égalité, $2^{m+1}q = (2^{m+1} - 1)\sigma(q)$. Donc $2^{m+1} | -(2^{m+1} - 1)q)$. Or $2^{m+1} \wedge (2^{m+1} - 1) = 1$ (deux entiers successifs sont toujours premiers entre eux). Donc, par le lemme de Gauss, $2^{m+1} | \sigma(q)$. Et donc, par définition de la divisibilité, $\exists r \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(q) = 2^{m+1}r$. Donc $2^{m+1}q = (2^{m+1} - 1)2^{m+1}r$ et donc $q = (2^{m+1} - 1)r$.

D'autre part, $q \geq 1$, donc $r \neq 0$ et donc $r \in \mathbb{N}^*$ avec $q = (2^{m+1} - 1)r$.

iii. On a alors $\sigma(n) = 2n = 2^{m+1}q = 2^{m+1}(2^{m+1} - 1)r$ et aussi $\sigma(n) = \sigma(2^m q) = (2^{m+1} - 1)\sigma(q)$. On a donc

$$\sigma(q) = 2^{m+1}r = q + r$$

iv. Supposons $r \neq 1$. Donc $r \geq 2$. Et donc $1, r \in \mathrm{Div}(r)$ avec $r \neq 1$. Alors $\mathrm{Div}(q)$ contient au moins 3 éléments distincts qui sont 1, r et q ($q \neq r$ car $m+1 \geq 2$ donc $2^{m+1}-1 \neq 1$). Et donc

$$q + r = \sigma(q) = \sum_{d|q} d = \sum_{d \in \mathrm{Div}(q)} d \geq q + r + 1 \qquad ☠$$

Donc $r = 1$. Et donc $q = 2^{m+1} - 1$. Mais dans ce cas, $\sigma(q) = q+1$. Donc si $\exists d \in \mathrm{Div}(q) \setminus \{1, q\}$, alors $\sigma(q) = q + 1 \geq q + d + 1$ et donc ☠ car $\mathrm{Div}(q) \subset \mathbb{N}^*$. Donc $\mathrm{Div}(q) = \{1, q\}$ et donc q est premier par définition d'un nombre premier.

Finalement, $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2^m(2^{m+1}-1)$ et $2^{m+1}-1$ est premier.

On connaît donc la forme de tous les nombres parfaits pairs.

Problème 2 (Polynômes) :
Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$. On utilisera le théorème suivant :

> **Théorème 0.1 :**
> Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^0([a,+\infty[,\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que
>
> $$g(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0,$$
>
> alors $\exists c \in]a,+\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.

1. Création d'une suite de polynômes.

(a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant qu'inverse d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On calcule facilement $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-1-2x}{(1+x+x^2)^2}$ et $f''(x) = \frac{6x(1+x)}{(1+x+x^2)^3}$. En posant donc $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = -1 - 2X$ et $P_2(X) = 6X(1+X)$, on a donc $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall n \in \{0,1,2\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$.

On remarque également que $(1+X+X^2)P_0'(X) - (0+1)(2X+1)P_0(X) = -(1+2X) = P_1(X)$ et $(1+X+X^2)P_1'(X) - (1+1)(2X+1)P_1(X) = -2(1+X+X^2) + 2(2X+1)^2 = 6X^2 + 6X = 6X(X+1) = P_2(X)$.

Supposons maintenant que $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) &= \frac{\widetilde{P_n}'(x)(1+x+x^2)^{n+1} - (2x+1)(n+1)(1+x+x^2)^n \widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{\widetilde{P_n}'(x)(1+x+x^2) - (n+1)(2x+1)\widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^{n+2}}.\end{aligned}$$

On pose alors $P_{n+1}(X) = P_n'(X)(1+X+X^2) - (n+1)(2X+1)P_n(X)$. Alors $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{\widetilde{P_{n+1}}(x)}{(1+x+x^2)^{n+2}}$.

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$.

(b) La question précédente, montre que $\deg(P_n) = n$ et $\mathrm{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$ pour $n \in \{0,1,2\}$.

Supposons que $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$. Alors $\deg(P_n) = n - 1$ car $n \geq 1$. Et donc $\deg((1+X+X^2)P_n'(X)) = 2 + \deg(P_n') = \deg(P_n) + 1 = n + 1$, par degré d'un produit. Et $\deg((2X+1)P_n(X)) = \deg(P_n) + 1 = n + 1$. Donc, par degré d'une somme, $\deg(P_{n+1}) \leq n + 1$.

D'autres part, $\mathrm{coeff\,dom}((1+X+X^2)P_n'(X)) = \mathrm{coeff\,dom}(P_n') = \deg(P_n)\,\mathrm{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n n(n+1)!$. Et $\mathrm{coeff\,dom}((n+1)(2X+1)P_n(X)) = 2(n+1)\,\mathrm{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n 2(n+1)(n+1)!$. Alors $\mathrm{coeff\,dom}((1+X+$

$X^2)P_n'(X))-\operatorname{coeff\,dom}((n+1)(2X+1)P_n(X)) = (-1)^n n(n+1)!-2(n+1)(-1)^n(n+1)! = (-1)^n(n+1)!(n-2n-2) = (-1)^{n+1}(n+2)! \neq 0$.

On en déduit donc $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_{n+1}) = (-1)^{n+1}(n+2)!$.

Et finalement, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$. Or c'est encore vrai pour $n = 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\exists P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}} = f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{Q_n}(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P_n}(x) = f^{(n)}(x) = \widetilde{Q_n}(x)$. Et donc le polynôme $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, et donc $P_n - Q_n = 0$ et donc $P_n = Q_n$.

2. Des relations de récurrences vérifiées par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) On pose $g(x) = 1+x+x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc $fg \in \mathcal{C}^\infty\mathbb{R}$. Et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = \begin{cases} 1+x+x^2 & k=0 \\ 1+2x & k=1 \\ 2 & k=2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

Par la formule de Leibniz, on a donc

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2,\ (fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) \\ &= g(x)f^{(n)}(x) + ng'(x)f^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}g''(x)f^{(n-2)}(x) \\ &= (1+x+x^2)\frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}} + \frac{n(2x+1)\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x+x^2)^n} + \frac{n(n-1)\widetilde{P_{n-2}}(x)}{(1+x+x^2)^{n-1}} \\ &= \frac{\widetilde{P_n}(x) + n(2x+1)\widetilde{P_{n-1}}(x) + n(n-1)(1+x+x^2)\widetilde{P_{n-2}}(x)}{(1+x+x^2)^n}.\end{aligned}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)f(x) = 1$, donc $\forall n \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(gf)^{(n)}(x) = 0$.

On en déduit donc

$$\begin{aligned}&\forall n \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\widetilde{P_n}(x) + n(2x+1)\widetilde{P_{n-1}}(x) + n(n-1)(1+x+x^2)\widetilde{P_{n-2}}(x)}{(1+x+x^2)^n} \\ \iff &\forall n \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{P_n}(x) + n(2x+1)\widetilde{P_{n-1}}(x) + n(n-1)(1+x+x^2)\widetilde{P_{n-2}}(x) = 0\end{aligned}$$

Donc $\forall n \geq 2$, le polynôme $P_n(X) + n(2X+1)P_{n-1}(X) + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2}(X)$ a une infinité de racines et donc on en déduit $\forall n \geq 2$, $P_n(X) + n(2X+1)P_{n-1}(X) + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2}(X) = 0$.

(b) D'après la formule précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} + (n+1)(2X+1)P_n(X) + n(n+1)(1+X+X^2)P_{n-1}(X) = 0$.

Par définition de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a également

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+X+X^2)P_n'(X) = P_{n+1}(X) + (n+1)(2X+1)P_n(X) = -n(n+1)(1+X+X^2)P_{n-1}(X).$$

Or $1+X+X^2 \neq 0$, donc on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n'(X) = -n(n+1)P_{n-1}(X)$.

3. Étude des racines réelles de P_n

(a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Supposons $\exists n_0 \geq 2$ tel que β racine de P_n et P_{n-1}. D'après la question 2a, on a $P_{n_0}(X) + n_0(2X+1)P_{n_0-1} + n_0(n_0-1)(1+X+X^2)P_{n_0-2}(X) = 0$. Donc $0 = \widetilde{P_{n_0}}(\beta) + n_0(2\beta+1)\widetilde{P_{n_0-1}}(\beta) + n_0(n_0-1)(1+\beta+\beta^2)\widetilde{P_{n_0-2}}(\beta) = n_0(n_0-1)(1+\beta+\beta^2)\widetilde{P_{n_0-2}}(\beta) = 0$. Or $n_0(n_0-1)(1+\beta+\beta^2) \neq 0$, donc $\widetilde{P_{n_0-2}}(\beta) = 0$. Et donc β est une racine de P_{n_0-2}.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n et P_{n+1} ont une racine en commun. Donc $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{P_n}(\beta) = 0 = \widetilde{P_{n-1}}(\beta)$. D'après la question précédente, on en déduit donc que β est aussi une racine de P_{n-1}. Donc β est une racine de P_n et P_{n-1}. Et par itération, β est une racine de P_{n+1}, P_n, P_{n-1}, ..., P_0. Or $P_0(X) = 1$. Donc P_0 n'a pas de racines et donc on a une contradiction.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, P_n et P_{n-1} n'ont pas de racines réelles en commun. Donc P_n et $n(n+1)P_{n-1}$ n'ont pas de racines réelles en communs. Donc P_n et P_n' n'ont pas de racines réelles en commun, d'après 2b. Et donc les racines réelles de P_n ne sont pas des racines de P_n'. Autrement dit, mes racines réelles de P_n sont simples.

4. Factorisation de P_n.

(a) On a $P_1(X) = -1 - 2X$. Donc P_1 est de degré 1, donc il est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

On a aussi $P_2(X) = 6X(X+1)$. Donc P_2 est aussi scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On suppose que P_n a n racines réelles distinctes $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$.

i. Par définition, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$. Donc en particulier, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $f^{(n)}(\alpha_k) = \frac{\widetilde{P_n}(\alpha_k)}{(1+\alpha_k+\alpha_k^2)^{n+1}} = 0$.

ii. On a montré plus haut que $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$. Donc $f^{(n)}$ est une fonction rationnelle dont le numérateur est une fonction polynomiale de degré n et de dénominateur de degré $2n+2 > n$. Donc $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.

iii. On a donc $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$ et $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, $f^{(n)}$ est continue sur $[\alpha_n, +\infty[$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]\alpha_n, +\infty[$. Donc, d'après le théorème 0.1, $\exists \beta \in]\alpha_n, +\infty[$ tel que $f^{(n+1)}(\beta) = (f^{(n)})'(\beta) = 0$.

De la même manière, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, $f^{(n)}(\alpha_1) = 0$, $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(]-\infty, \alpha_1], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]-\infty, \alpha_1[, \mathbb{R})$, donc, toujours par le théorème 0.1, $f^{(n+1)}(\gamma) = 0$ pour un certain $\gamma \in]-\infty, \alpha_1[$.

iv. Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. On a $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0([\alpha_k, \alpha_{k+1}], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]\alpha_k, \alpha_{k+1}[, \mathbb{R})$ et $f^{(n)}(\alpha_k) = 0 = f^{(n)}(\alpha_{k+1})$. Donc par le théorème de Rolle, $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\exists \beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $f^{(n+1)}(\beta_k) = 0$.

On vient donc de trouver $n-1$ zéros distincts pour la fonction $f^{(n+1)}$. Donc on vient de trouver $n-1$ racines distinctes au polynôme P_{n+1}.

De plus, d'après la question précédente, $f^{(n+1)}$ s'annule aussi sur $]-\infty, \alpha_1[$ et sur $]\alpha_n, +\infty[$. Donc P_{n+1} a un zéro dans ces deux intervalles.

Donc finalement, on vient de trouver $n+1$ racines distinctes de P_{n+1} (on a $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n$).

(c) Dans la question précédente, on vient de montrer que si $\exists n \geq 2$ tel que P_n est scindé à racines simples (donc toutes distinctes), alors P_{n+1} a $n+1$ racines distinctes. Mais comme $\deg(P_{n+1}) = n+1$, P_{n+1} a donc autant de racines distinctes que son degré, donc P_{n+1} a autant de racines comptés avec multiplicité que son degré. Donc, par caractérisation des polynômes scindés, P_{n+1} est scindés à racines simples.

Or P_1 et P_2 sont scindés. Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé à racines simples.

5. Étude de f en 0.

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

(a) D'après la question 1a, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^n}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = \widetilde{P_n}(0)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\widetilde{P_n}(0)}{n!}$.

Mais d'après la question 2a, on a également, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(X) + (n+2)(2X+1)P_{n+1}(X) + (n+2)(n+1)(1+X+X^2)P_n(X) = 0$. Donc en particulier,

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N},\ \widetilde{P_{n+2}}(0) + (n+2)\widetilde{P_{n+1}}(0) + (n+2)(n+1)\widetilde{P_n}(0) = 0 \\
\iff &\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} + \frac{(n+2)\widetilde{P_{n+1}}(0)}{(n+2)!} + \frac{(n+2)(n+1)\widetilde{P_n}(0)}{(n+2)!} = 0 \\
\iff &\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0.
\end{aligned}$$

(b) Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels d'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$. On en déduit donc que $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda\cos(2n\pi/3) + \mu\sin(2n\pi/3)$. Avec a_0 et a_1 on peut déterminer les valeurs de λ et μ mais on peut déjà voir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique de période 3. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+3} = \lambda\cos(2n\pi/3 + 2\pi) + \mu\sin(2n\pi/3 + 2\pi) = a_n.$$