DS 8
Arithmétique - Polynômes

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 6 Mars 2024

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Arithmétique : Entiers parfaits) :
On appelle *fonction arithmétique* toute application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. On dira qu'une fonction arithmétique f est multiplicative, si $f(1) = 1$ et $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$, si $m \wedge n = 1$, $f(mn) = f(m)f(n)$.

Le but du problème est d'étudier quelques fonctions arithmétiques classiques.

Notations :

- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap \mathrm{Div}(n)$, l'ensemble des diviseurs premiers de n.

Partie 1 : Généralités

On va établir ici quelques résultats arithmétiques portant ou non sur les fonctions arithmétiques mais qui seront utiles dans la suite du problème.

1. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer $\mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(m) = \mathrm{Div}(m \wedge n)$ et $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m \wedge n}$.
   (b) Montrer $\mathcal{P}_m \cup \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{m \vee n}$.
   (c) Que dire de $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_n$ si m et n sont premiers entre eux ?
2. Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge (bc) = a \wedge c$ et $(ab) \wedge c = (a \wedge c)(b \wedge c)$.
3. Soit $m, n \in \mathbb{N}*$ premiers entre eux. On considère les deux applications

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(m) \times \mathrm{Div}(n) & \to & \mathrm{Div}(mn) \\ (d, \delta) & \mapsto & d\delta \end{array} \quad \text{et} \quad \xi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(mn) & \to & \mathrm{Div}(m) \times \mathrm{Div}(n) \\ q & \mapsto & (m \wedge q, n \wedge q) \end{array}$$

   Montrer que ψ et ξ sont deux bijections inverses l'une de l'autre.

4. Soit f une fonction arithmétique multiplicative.
   (a) Montrer que $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\forall (n_1, \ldots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ deux à deux premiers entre eux,
   $$f\left(\prod_{k=1}^{r} n_k\right) = \prod_{k=1}^{r} f(n_k).$$
   (b) Montrer que f est caractérisé par les $f(p^k)$ où $(p,k) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}^*$.

Partie 2 : Les entiers parfaits

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ la somme des diviseurs de n.

5. Montrer que σ est multiplicative en utilisant la partie 1.
6. (a) Que valent les $\sigma(p^k)$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$?
   (b) En déduire que
   $$\forall n \geq 2,\ \sigma(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{p^{v_p(n)+1} - 1}{p - 1}.$$
   (c) Calculer $\sigma(2024)$.
7. On dit qu'un entier $n \geq 2$ est parfait si $\sigma(n) = 2n$.
   (a) Montrer que si $2^k - 1$ est premier, alors $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ est parfait et pair.
   (b) Réciproquement, on suppose $n \geq 2$ est parfait et pair.
      i. Justifier qu'il existe $m, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2^m q$ et q impair.
      ii. Montrer que $\exists r \in \mathbb{N}^*$ tel que $q = (2^{m+1} - 1)r$.
      iii. En déduire $\sigma(q) = q + r$.
      iv. En déduire que $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2^k(2^{k-1} - 1)$ et $2^k - 1$ premier.

Remarque :
L'existence de nombres parfaits impairs est un problème ouvert.

Problème 2 (Polynômes) :
On reprend l'étude du prb 2 du DS6. On rappelle que le but est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$. On rappelle qu'on a déjà montré :

Théorème 0.1 :
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^0([a, +\infty[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que
$$g(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0,$$
alors $\exists c \in]a, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.

On pourra utiliser ce résultat librement.
On a déjà justifier que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Création d'une suite de polynômes.
   (a) Montrer (de nouveau) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$ où $P_{n+1}(X) = (1+X+X^2)P_n'(X) - (n+1)(2X+1)P_n(X)$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$.
   (c) Justifier de l'unicité du polynôme P_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
2. Des relations de récurrences vérifiées par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x+x^2)f(x) = 1$, établir que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2} = 0.$$
   (b) En déduire
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n' = -n(n+1)P_{n-1}.$$
3. Étude des racines réelles de P_n.
   (a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\exists n_0 \geq 2$ tel que β racine de P_{n_0} et P_{n_0-1}, alors β est aussi racine de P_{n_0-2}.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine réelle en commun.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines réelles de P_n sont toutes simples.
   On va améliorer ce résultat dans la question suivante.
4. Factorisation de P_n
   (a) Montrer que P_1 et P_2 sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On suppose que P_n a n racines réelles distinctes $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
      i. Montrer que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $f^{(n)}(\alpha_k) = 0$.
      ii. Déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
      iii. En déduire que la fonction $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]\alpha_n, +\infty[$ et sur l'intervalle $]-\infty, \alpha_1[$.
      iv. Montrer que le polynôme P_{n+1} possède exactement $n+1$ racines réelles distinctes.
   (c) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est scindé à racine simple dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Étude de f en 0.
   On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$.
   (a) À l'aide d'une relation entre les P_n, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 0$.
   (b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.