Chapitre 20 - TD : Représentation Matricielle

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

26 mars 2024

1 Représentation matricielle

Exercice 1 :
Déterminer les matrices des applications suivantes relativement aux bases canoniques :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-2x+z) \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y+z, z+x, x+y) \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$

4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (\widetilde{P}(1), \widetilde{P}(2), \widetilde{P}(3)) \end{array}$

5. $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & \widetilde{P}(A) \end{array}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :
Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\overline{z}$. Former la matrice de l'endomorphisme f du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ dans la base $(1, i)$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 3 :
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice relativement à la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on pose $u_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ et $u_2 = e_1 + e_4$.

1. Expliquer pourquoi (u_1, u_2) une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base (u_3, u_4) de $\ker(f)$.
3. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
4. On note $\widetilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$. Déterminer la matrice de $\widetilde{f}$ dans la base (u_1, u_2).

Exercice 4 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire pour f ?
2. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
3. Quelle est la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe ?

Exercice 5 ([✓]) :
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. Démontrer que ces sev sont supplémentaires.
2. Déterminée une base adaptée à cette somme directe. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Décrire f comme composée de transformations vectorielles élémentaires.

Exercice 6 ([✓](*)) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ (donc f est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence n).

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$
3. En déduire que
$$\{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\} = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$$

Exercice 7 (***) :
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.

Montrer qu'il existe une bases de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 8 (Matrice a diagonale strictement dominante [✓](*)) :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est inversible.

2 Changement de base

Exercice 9 ([✓]) :
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On pose

$$\varepsilon_1 = (1,1,1),\ \varepsilon_2 = (1,-1,0),\ \varepsilon_3 = (1,0,1)$$

et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$
3. Déterminer une base de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 10 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$
2. Exprimer la matrice P de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
3. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 :
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1,0,1)$, $\varepsilon_2 = (-1,1,0)$ et $\varepsilon_3 = (1,1,1)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$
3. Donner la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}$

Exercice 12 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ soit D.
2. Déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. En déduire le terme général des suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 13 :
Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

et l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & AM - BM \end{array}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, puis dans la base obtenue en intervertissant les deux vecteurs du milieu de la famille.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (E_{1,1} + E_{2,1}, E_{1,2} + E_{2,2}, E_{1,1} - E_{2,1}, E_{1,2} - E_{2,2})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
4. Écrire la matrice de f dans cette nouvelle base. Que peut-on en déduire que l'application linéaire f ?

3 Rang

Exercice 14 :
Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$
3. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + t)$

Exercice 15 :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égale à 1.

Exercice 16 (*) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les rangs de A et B.
2. Calculer $(AB)^2$. En déduire BA.

Exercice 17 ([✓](*)) :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \ker(A) \oplus \mathrm{Vect}(X_0)$, en voyant $\ker(A)$ comme un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ via l'isomorphisme canonique $\mathrm{Mat} : \mathbb{K}^n \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice 18 ([✓]) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Comparer $\mathrm{rg}(A{}^tA)$ et $\mathrm{rg}({}^tAA)$ et les calculer.

Exercice 19 (*) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$ et $A + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner deux exemples de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifiant ces hypothèses.
2. Soit u, v les deux applications linéaires canoniquement associées à A et B respectivement. Comparer $\mathrm{Im}(v)$ et $\ker(u)$. En déduire $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \leq n$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \geq n$. Conclure.

4 Application de la représentation matricielle

Exercice 20 :
Déterminer les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AMB = 0$.

Exercice 21 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AUA = A$.
2. Montrer que $\exists U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que UA est une matrice de projection.

Exercice 22 :
On définit la relation $\lhd$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$A \lhd B \iff \exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A = UBV.$$

Montrer que pour deux matrices quelconques $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A \lhd B \iff \mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$.

Exercice 23 (*) :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F, G deux sevs de E avec $F \subset G$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\dim(u(G)) - \dim(u(F)) \leq \dim(G) - \dim(F).$$
2. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que
$$\mathrm{rg}(AB) + \mathrm{rg}(BC) \leq \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}(ABC).$$

Exercice 24 :
Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.
2. En déduire que $H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$.

Exercice 25 (Mines MP) :
Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f^2 = g^2 = 0$ et $f \circ g = g \circ f$.

1. On suppose ici que $f = 0$. Calculer alors $f \circ g$.
2. On suppose maintenant que $f \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle, la matrice de f est de la forme
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (b) En déduire la forme de la matrice de g dans cette même base.
   (c) Déterminer alors $f \circ g$

Exercice 26 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geq 2$

1. Indiquer des endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, la famille $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.
3. Déterminer tous les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est diagonale dans toutes les bases de E
4. Quels sont les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E ?

Exercice 27 (CCP PSI (**)) :
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nulle telle que
$$f^3 + f = 0$$
Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$ et que l'on peut trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$