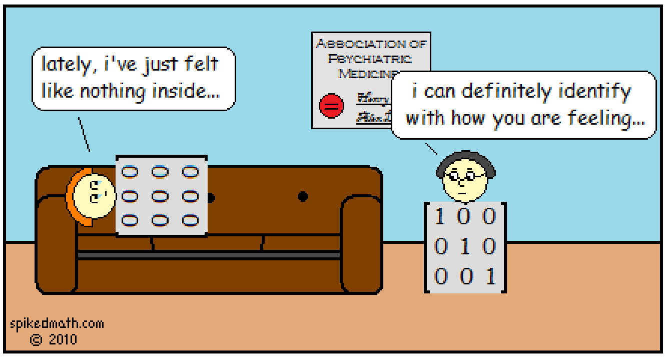
Chapitre 20
Représentation Matricielle

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

26 mars 2024



Ce chapitre est celui qui permet de faire corps avec tous les autres chapitres d'algèbre linéaire. Un chapitre pour les fusionner tous ; un chapitre pour les regrouper ; un chapitre pour les réunir tous, et dans l'algèbre linéaire, les liés. C'est celui qui va faire sens.

Le but est de réunir les objets vectoriels abstraits définis en début d'année et de leur donner un sens concret. On va écrire matriciellement des vecteurs abstraits. Ce qui donnera un sens aux matrices (ce ne seront plus que des objets calculatoire) et inversement, les matrices permettront de donner "corps" aux objets vectoriels abstraits.

Il faudra prendre garde à ce que le passage d'un monde à l'autre "dénature" un peu les objets. On aura pas tout à fait les mêmes informations. Du côté matriciel, les manipulations seront grandement simplifiées car seront réduits à de simples calculs, mais on aura plus que des tableaux de nombres sans sens spécifique ; du côté vectoriel, les objets manipulés feront sens (transformation géométrique etc), mais la manipulation sera plus délicate car abstraite.

Il faudra garder toujours à l'esprit le moyen utilisé pour passer d'un monde à l'autre, la transcription qui permet de donné du sens aux calculs matriciel, et inversement, à pouvoir écrire les matrices qui vont représenter les objets abstraits.

Table des matières

1 Représentation matricielle

1.1 Matrice d'un vecteur

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et si $x \in E$, on sait, depuis le chapitre sur les ev de dimension finie, que $\exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Définition 1.1 (Matrice d'un vecteur [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et soit $x \in E$.

On appelle matrice représentant le vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, dont les coefficients sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

!!! ATTENTION !!!

La matrice d'un vecteur dépend entièrement et complètement et totalement et intégralement et pleinement et radicalement du choix de la base $\mathcal{B}$. Si on change de base, les coordonnées de x changent et donc la matrice associée aussi. D'où l'intérêt de mettre la base en indice. Et d'où les ennuis qui vont venir (vous les sentez venir) en changeant de base.

On rappelle que l'ordre dans lequel on donne les vecteurs d'une base fait partie intégrante de la définition de la base. Changer d'ordre les vecteurs d'une base est un changement de base. Les changer de place revient déjà à modifier les vecteurs de la base et donc de changer de base. L'ordre des vecteurs à donc beaucoup d'importance dans la définition d'une base. Et ça se voit particulièrement dans l'écriture matricielle.

En fait, si on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et un vecteur $x \in E$ qui s'exprime $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$, on a donc une correspondance pour les places :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightsquigarrow & e_1 \\ \rightsquigarrow & e_2 \\ \vdots & \\ \rightsquigarrow & e_{n-1} \\ \rightsquigarrow & e_n \end{matrix}$$

Il faut bien comprendre que fondamentalement, une matrice n'est qu'une liste de valeurs. Pour lui donner un sens, il faut savoir déjà dans quel ordre la lire. Il faut donc savoir quel élément de la matrice associé à quel vecteur d'une base donnée. La convention, assez naturelle, est de les associer dans le même ordre. Mais donc changer l'ordre des vecteurs d'une base va donc opérer une permutation sur les associations coefficients/vecteurs et donc va changer le vecteur représenté.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique et $\mathcal{B}' = (e_2, e_1)$ les mêmes vecteurs mais dans l'ordre inverse. Alors $(1, 2) = e_1 + 2e_2$. Donc sa représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1 + 2e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Mais dans la base $\mathcal{B}'$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(e_1 + 2e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui n'est donc pas la même matrice. Pourtant les vecteurs définissant les bases sont globalement les mêmes. Et le vecteur représenté reste le même également. Mais l'interversion des vecteurs de la base a provoqué une interversion sur les coordonnées de la matrice et a donc changé la matrice.

En résumé, la représentation matricielle contient 2 informations. Le choix des vecteurs qui définissent la base et l'ordre dans lequel on énumère ceux-ci. Il faudra donc bien faire attention. La base $(e_1, \ldots, e_n)$ n'est pas la même base que $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_2, e_1)$.

Cependant, grâce à la commutativité de la LCE dans un espace vectoriel, changer les vecteurs de place dans une base donnée, ne modifiera pas l'espace engendré. Autrement dit, un vecteur abstrait a une existence propre qui ne dépend pas de la façon dont on le décrit. L'ordre dans lequel on énumère ses composant dans une base donnée (*i.e.* dans un dictionnaire particulier) ne change pas la définition même du vecteur. Seule sa représentation change. C'est ce que constitue les matrices. Ce sont les représentations d'objets vectoriels dans une base donnée.

Une matrice colonne donnée n'est, en soit, qu'une colonne de nombres. On ne peut pas lui donner de sens a priori. Pour pouvoir lui donner un sens vectoriel (autre que seulement le fait que c'est un vecteur d'un espace de matrices), il faut pouvoir avoir un "décodeur" qui permet de pouvoir "lire" la matrice. Il faut donc pouvoir associer chaque coefficients de la matrice à des vecteurs. Et c'est le choix d'une base (et d'un espace vectoriel) qui permet de le faire.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Avec une matrice explicite, le choix de la base permettant de lui donner un sens, n'est pas claire, elle est tacite. Il est impératif de toujours bien garder à l'esprit la base permettant d'écrire les vecteurs (et donc les matrices). D'où l'importance des indices dans les notations.

Définition 1.2 (Vecteur colonne élémentaire) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on renomme les matrices élémentaires $E_{i,1}$ en E_i simplement :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Proposition 1.1 (Matrice des vecteurs de la base) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Alors $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i) = E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Démonstration :
Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i)$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les coefficients correspondent aux coordonnées de e_i dans la base $\mathcal{B}$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ avec $e_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Donc ici, $\alpha_k = \delta_{i,k}$. D'où la relation. $\square$

Théorème 1.2 (Isomorphisme de représentation matricielle [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :
La linéarité n'est pas dure.

La bijectivité peut s'obtenir de plusieurs façons. Soit avec la bijection réciproque, soit avec la définition avec les quantificateurs, soit avec le théorème d'isomorphisme ... □

Remarque :
Les notations sous forme matricielle des vecteurs qui sont utilisés en SI et en physique utilise en fait cet isomorphisme. Quand on écrit un vecteur sous forme de colonne, c'est en réalité sa matrice représentative que l'on écrit et on assimile les deux via cet isomorphisme. Ce n'est donc pas le vecteur. Mais sa matrice (qui est également un vecteur, mais pas de la même nature). Il est en général sous-entendu que l'identification entre vecteurs et matrices représentatives est faite. Mais rigoureusement, c'est faux.

Il sera, bien entendu, interdit de faire cet amalgame en mathématique puisque précisément, l'objet de ce cours et de faire la distinction entre les deux et d'expliquer comment on peut écrire matriciellement un vecteur qui n'est pas une matrice.

!!! ATTENTION !!!

Il est indispensable de toujours bien préciser, dans les notations, les bases permettant de donner un sens aux matrices. Cet isomorphisme n'a de sens qu'avec le choix d'une base. Et à chaque choix de base est associé un nouvel isomorphisme.

Pour utiliser ces isomorphisme de représentations matricielles, il faudra donc préciser clairement les bases utilisées.

Exemple 1.1 :
Dans $\mathbb{R}^2$, si on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{C} = ((1,1),(1,-1))$, on obtient deux isomorphismes de représentations matricielles différents. Le vecteur $(-1,1)$ a donc deux représentations matricielles

différentes, et inversement, la même matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ représente deux vecteurs différents, selon l'isomorphisme utilisé.

1.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.3 (Matrice représentant une famille de vecteurs [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de $p \geq 1$ vecteurs de E.

On appelle matrice représentant la famille $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{B}$, ou matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes $C_1, \dots, C_p$ sont les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$ cette matrice. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Mat}(C_1, \dots, C_p) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_1 & \dots & u_p \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

où $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $u_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k$.

Remarque :
Dans le cas $p = 1$, on retombe sur la définition précédente d'une matrice d'un vecteur.

Remarque :
On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = I_n$.

Exemple 1.2 :
Donner la matrice des coordonnées des polynômes $P_k(X) = (X+1)^k$ pour $0 \leq k \leq 3$, dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Remarque :
Pour justifier de la matrice représentative d'une famille de vecteurs, il faudra expliquer comment

la matrice a été remplie. Il ne suffit pas, comme d'habitude, de seulement l'écrire. Et pour cela, il faut donner la base par rapport à laquelle on écrit les vecteurs et les vecteurs qui sont représentés. Autrement dit, il faut décrire les éléments "hors matrices" au dessus et à droite.

1.3 Matrice représentant une application linéaire

Définition 1.4 (Matrice d'une application linéaire [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension respective n et p, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F. Et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice représentative de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice dans $\mathcal{C}$ de la famille image des vecteurs de $\mathcal{B}$ (donc de la famille $f(\mathcal{B})$). On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow u_1 \\ \vdots \\ \leftarrow u_p \end{array} \end{array} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

où $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{k,j} u_k$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ La matrice associée à une application linéaire dépend du choix d'une base au départ ET à l'arrivée. Elle dépend donc du choix de deux bases. Changer une seule des deux bases modifiera la matrice.

On prendra particulièrement garde à l'ordre dans lequel on donne les bases, qui est source de la majorité des problèmes de compréhension.

!!! ATTENTION !!!

Cette notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ n'est pas canonique. Dans la littératures, vous trouverez peut être les bases notées dans l'ordre inverse. Certains profs note aussi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ ou même encore $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, chacun utilisant les notations qui lui sont le plus naturels. J'ai adopté cette notation pour faciliter les écriture dans les formules de changement de bases et pour une certaines cohérence avec le produit matriciel. C'est un choix de ma part. S'il ne vous plaît pas, libre à vous d'en changer. Mais il faudra redéfinir dans les copies vos notations.

Cependant, ce choix de notation semble être le plus répandu. Il semble que la majorité des enseignants utilisent cette notation. Mais elle n'est pas officielle.

On rappelle qu'une base n'est qu'un dictionnaire pour pouvoir écrire les choses, pour pouvoir s'exprimer. Il y a un choix à faire et la forme de ce qui est dit dépend du choix du dictionnaire dans lequel on s'exprime.

Exemple 1.3 :
Soit $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (x+2y-z, x-y)$. Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques.

Exemple 1.4 :
Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ et l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto & (\widetilde{P}(a), \widetilde{P}(b), \widetilde{P}(c)) \end{array}$$

Donner la matrice de g relativement aux bases canoniques.

!!! ATTENTION !!!

Pour avoir des matrices, il est nécessaire d'avoir des espaces de dimension finies au départ et à l'arrivée, puisqu'il y a autant de lignes que de dimension de l'espace d'arrivée et autant de colonne que de dimension de l'espace de départ. Donc si l'un des deux espaces est de dimension infinies, on aurait un nombre infini de ligne ou de colonne. Ce qui n'est plus une matrice.

1.4 Application linéaire associée à une matrice

On vient de voir comment associer une matrice à une application linéaire, mais ça marche dans le sens inverse. Dans l'autre sens, on ne se donne qu'une matrice (sans ev, bases etc). Une matrice en soit, n'a pas grand sens. Ce n'est qu'un tableau de nombre. Pour lui donner un sens (en tant qu'application), il faut avoir des ev et des bases. Il faut donc faire un choix de deux ev et une base dans chacun d'eux. Et faire un choix est toujours désagréable en mathématiques (discrimination etc). Mais on a des choix d'ev particulier déjà tout fait (donc des choix canoniques) : $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique. C'est à ça que servent les objets canoniques : ce sont des choix déjà fournis, des choix meilleurs que les autres en un sens.

En particulier, tout ev de dimension finie est isomorphe à un $\mathbb{K}^n$. Donc les ev de dimension finie ne sont que des copies tordues de $\mathbb{K}^n$. Autrement dit, il n'existe qu'un seul type d'ev qui sont les $\mathbb{K}^n$. Tous les autres n'étant que des versions bizarres de ceux là.

Définition 1.5 (Application linéaire canoniquement associé à une matrice [✓]) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

On définit l'application linéaire canoniquement associé à A comme l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = A$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Vous noterez l'interversion entre la taille des matrices et le départ et l'arrivée de l'application linéaire : on a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbf{n}}, \mathbb{K}^{\mathbf{p}})$ mais $A \in \mathcal{M}_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(\mathbb{K})$.

Exemple 1.5 :
Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1.5 Cas des endomorphismes

Définition 1.6 (Matrice d'un endomorphisme [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. La matrice représentative de l'application linéaire f est alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$. C'est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Remarque :
En particulier, la matrice de l'identité de E est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E(\mathcal{B})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$$

Exemple 1.6 :
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,0)$ et $\varepsilon_3 = (1,0,0)$. On considère également l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$. Donner la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$ et relativement à la base $\mathcal{C}$.

2 Application du calcul matriciel aux applications linéaires

Dans toute la suite (tous le chapitre), E et F seront des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies $n \geq 1$ et $p \geq 1$ respectivement. On notera $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base de F. Un vecteur sera noté avec une lettre minuscule et sa matrice associée par la même lettre en majuscule dans les bases qui correspondent. Par exemple si $x \in E$, on notera X la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

2.1 Image d'un vecteur

Proposition 2.1 (Caractérisation d'égalité matricielle [✓]) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a

$$A = B \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX$$

Démonstration :
C'est un jeu d'écriture.

$\boxed{\Leftarrow}$ On a en particulier, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $AE_i = BE_i$. Mais, par calcul matriciel, on a $AE_i = C_i(A)$. Donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $C_i(A) = C_i(B)$. Donc les matrices A et B ont les mêmes colonnes, donc elles sont égales.

$\boxed{\Rightarrow}$ C'est évident. □

En fait, cet énoncé est plutôt un exercice. Ce serait même une question de cours. Il est donc conseiller de savoir le démontrer également.

Théorème 2.2 (Expression matricielle de l'image d'un vecteur [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension respective $n \geq 1$ et $p \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est l'unique matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ y = f(x) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

Démonstration :
On reprend les notations de l'énoncé et on pose $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Commençons par l'unicité. Supposons qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telles que $\forall y \in F$, $\forall x \in E$ tels que $y = f(x)$ on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(y) = A\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = B\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. En particulier, on a donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = BX$. Par la proposition précédente, on en déduit donc $A = B$.

Il reste à montrer l'existence. C'est un jeu d'écriture. On pose $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$. Soit $x \in E$ et $y \in F$. On a donc $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et $y = \sum_{i=1}^{p} y_i \varepsilon_i$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{p,j} x_j \end{pmatrix}$$

et donc l'égalité $Y = AX$ nous donne, par égalité des coefficients,

$$\forall i \in \{1, \dots, p\},\ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

Parallèlement, par définition de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$, les coefficients des colonnes correspondent aux coordonnées des vecteurs $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Donc

$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \varepsilon_i$$

On en déduit, par linéarité, que l'image de $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ est

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} x_j a_{i,j} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j} \right) \varepsilon_i$$

On a donc finalement

$$y = f(x) \iff \forall i \in \{1, \dots, p\},\ y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j}$$

Autrement dit,

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$. □

Exemple 2.1 :
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f un endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Calculer l'image d'un vecteur $x \in E$ par l'application f. Déterminer le noyau de f.

Définition 2.1 (Noyau d'une matrice) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit $\ker A$, le noyau de la matrice A, comme étant le noyau de l'application linéaire canoniquement associé à A.

Remarque :
Attention au monde dans lequel on vit ! On rappelle que l'endomorphisme canoniquement associé à A est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ dont la représentation dans les bases canoniques est la matrice A. Donc $\ker A \subset \mathbb{K}^p$. Mais si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathrm{Mat}(f) = A$, alors $\ker f \subset E$. Donc $\ker A \approx \ker f$ mais $\ker A \neq \ker f$. Même si les expressions peuvent être identique.

Exemple 2.2 :
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\ker A$.

Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \{y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ y'' + 2y' - 3 = 0\} \\ P & \mapsto & \left(x \mapsto -2\widetilde{P'}(-3/4)e^{-2x} + \left(3\widetilde{P}(0) + 3\widetilde{P'}(-1/2) - \widetilde{P''}(2)\right)e^{x}\right) \end{array}$$

Montrer que f est une application linéaire bien définie. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques (ou presque pour l'arrivée) et calculer le noyau de f.

Définition 2.2 (Image d'une matrice) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et f son application linéaire canoniquement associée.

On définit l'image de A, noté $\operatorname{Im} A$, comme l'ensemble image de l'application linéaire canoniquement associée à A, *i.e.*

$$\operatorname{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^p,\ \exists x \in \mathbb{R}^n,\ AX = Y\}.$$

2.2 Isomorphisme de représentation matricielle

Théorème 2.3 (Isomorphisme de représentation matricielle [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finies respectives $n \geq 1$ et $p \geq 1$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Démonstration :
C'est essentiellement un jeu d'écriture. Je laisse la démo que c'est une application linéaire en exercice.

Pour montrer que ce morphisme est bijectif, par le théorème du rang et par le fait que $\dim \mathcal{L}(E, F) = np = \dim \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il suffit de montrer que cette application est injective. Donc d'étudier son noyau.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = 0$. On a donc $\forall x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0$. Donc $f = 0$. D'où l'injectivité et donc la bijectivité. □

Remarque :
Cet isomorphisme nous permet donc “d'identifier” une application et sa matrice associée (avec un choix de bases, bien sûr). Autrement dit, se donner une application revient à se donner une matrice (avec un choix de base sous-jasent pour retrouver l'application linéaire). On pourra donc indifféremment raisonner sur les applications linéaires pour un point de vue abstrait, ou passer aux matrices pour un point de vue un peu plus “concret”. Encore une fois, le passage aux matrices est tributaire du choix d'un couple de base. Le point de vue vectoriel abstrait permet de s'affranchir de ce choix de base.

Par exemple, pour la proposition 2.1, on peut désormais la démontrer ou la comprendre en

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = BX \iff \forall x \in \mathbb{K}^n, f(x) = g(x) \iff f = g$$

si f est l'application linéaire canoniquement associé à A et g l'application linéaire canoniquement associée à B. La première équivalence est assurée par l'isomorphisme au dessus. La seconde, n'est que la définition de l'égalité entre applications linéaires.

2.3 Composition d'applications linéaires

Théorème 2.4 (Représentation matricielle d'une composée d'applications linéaires [✓]) :
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $\mathcal{D}$ une base de G. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$$

Remarque :
Ce théorème justifie donc le choix de la notation. Et en particulier le choix de la position des bases qui pouvait sembler un peu inverser. Mais la composition inverse aussi les choses. On inverse donc la position des bases pour correspondre à l'inversion de la composition.

Démonstration :
Soit $x \in E$ et $y = g \circ f(x)$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(g \circ f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Mais d'un autre côté, $y = g(f(x))$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

d'où l'égalité des matrices par la CNS d'égalité matricielle. □

Corollaire 2.5 (Composition d'endomorphisme) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels vérifiant

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^p$$

Démonstration :
Ça découle directement de ce qui précède. □

Exemple 2.3 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. f est un projecteur si et seulement si $A^2 = A$
2. f est une symétrie si et seulement si $A^2 = I_n$

2.4 Isomorphismes et matrices inversibles

Théorème 2.6 (Matrice d'un isomorphisme [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre

(i) $f \in \mathrm{GL}(E, F)$

(ii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

De plus, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

Démonstration :
$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Si f est un isomorphisme, on a $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. En passant au matrice, on a $I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1})$. Donc, par caractérisation des matrices inversibles, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est inversible et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1})$.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Supposons que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est inversible. Par l'isomrophisme entre $\mathcal{L}(F,E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une application $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)^{-1}$. Et alors, par multiplication matricielle et sa version de la composition, on a le résultat. □

Exemple 2.4 :
Soit $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(P) = (\widetilde{P}(0), \widetilde{P}(1))$. Montrer que f est inversible. Déterminer l'application inverse.

Corollaire 2.7 (Cas des endomorphismes) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ muni d'une base $\mathcal{B}$.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et dans ce cas

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$$

Remarque :
L'intérêt de cet outil, comme pour les précédents, est de transférer un problème vectoriel sur un problème matriciel. On transfère ici la question de l'inversibilité d'une application linéaire, a priori abstraite, sur la question très concrète de l'inversibilité d'une matrice.

Pour l'instant, nous n'avons de moyen très efficace pour déterminer l'inversibilité d'une matrice. Donc ce résultat perd un peu en puissance. Mais dans la suite du chapitre et surtout dans les chapitres prochains, nous aurons des outils très puissant pour déterminer l'inversibilité d'une matrice. Ce qui donnera toute sa force à ce genre de résultat (ainsi qu'à cette idée de représentation matricielle des objets vectoriels, en général).

2.5 Dictionnaire Espaces vectoriels / Matrices

Espaces vectoriels	$\leftrightsquigarrow$	Matrices
Vecteurs		Matrices colonnes
$x \in E$		$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
0_E		$0_{n,1}$
$\lambda x + \mu y$		$\lambda X + \mu Y$
Application linéaire		Matrice rectangulaire
$u \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$		$A \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{n}}(\mathbb{K})$
$0_{\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})}$		$0_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{n}}$
$y = u(x)$		$Y = AX$
$\lambda u + \mu v$		$\lambda A + \mu B$
$v \circ u$		BA
u isomorphisme		A matrice inversible
u^{-1}		A^{-1}
Endomorphisme		Matrice carrée
$u \in \mathcal{L}(E)$		$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Id_E		I_n
u^m		A^m
$u \in \mathrm{GL}(E)$, u^{-1}		$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, A^{-1}

2.6 Endomorphismes particuliers

2.6.1 Homothéties

Proposition 2.8 (Matrice des homothéties) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$. Et h l'homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$.
Dans toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \lambda I_n$.

Démonstration :
Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors $\forall i \in \{1, \ldots, e_n\}$, $h(e_i) = \lambda e_i$. Donc, par définition $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$$

□

Remarque :
Donc la matrice d'une homothétie est identique dans TOUTES les bases.

Ces endomorphismes ne sont pas palpitants mais les matrices d'homothéties apparaissent régulièrement et il est important de pouvoir les reconnaître pour redonner un sens vectoriel aux matrices.

2.6.2 Projections et symétries

Théorème 2.9 (Représentation matricielle d'un projecteur) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$, F, G deux sev supplémentaires de E avec $\dim F = r$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors la matrice de p dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

Théorème 2.10 (Représentation matricielle d'une symétrie) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, F, G deux sev suplémentaires de E avec $\dim F = r$. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

Si s est la symétrie vectorielle par rapport à F et parrallèlement à G, alors la matrice de s dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Pour une représentation matricielle simple d'une symétrie ou d'une projection, il faut se placer dans une basse adaptée à la décomposition en somme directe. Une projection et une symétrie ont une bonne tête quand elles sont exprimés dans une base adaptée à la somme directe. Dans une base quelconque, on ne voit plus rien et elles redeviennent moche. Du coup, dans une base quelconque, la matrice d'une projection ou d'une syméétrie peut avoir n'importe quelle tête.

Exemple 2.5 :
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_2)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Formules de changement de bases

C'est l'intérêt essentiel de ce chapitre, ce qui le rend puissant et c'est aussi le cœur des problème. On l'a vu dans le cas des projecteurs et symétrie, si l'on choisi une "bonne base", alors la matrice de ces endomorphisme est "sympathique".

On a compris d'autre part depuis longtemps que la forme des vecteurs dépend de la base dans laquelle on les décrits. Changer de bases, va donc changer l'expression des applications linéaires et donc, va également changer leur matrice.

Le but ici est de comprendre ce fonctionnement en détail pour pouvoir l'utiliser à notre avantage en se ramenant, autant que possible, a des matrices les plus simples possibles pour simplifier les calculs.

3.1 Matrices de passages

Définition 3.1 (Matrice de passage) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et d'une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1, \dots, e_n).$$

Exemple 3.1 :
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ la famille de vecteurs définies par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ \varepsilon_2 = e_2 - e_3 \\ \varepsilon_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est une base et $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

Proposition 3.1 (Matrices de passage vue comme matrices d'applications) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Alors

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

Démonstration :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E(\mathcal{B})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = P$$

□

⚠ Attention, la matrice de l'identité n'est la matrice I_n que lorsque Id_E est exprimé dans la même base au départ **ET** à l'arrivée. Si on a pas la même base au début et à l'arrivée, l'identité est un peu caché.

Proposition 3.2 (Matrice de passage inverse) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E.

Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, alors $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

Démonstration :
On note $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E)$. On a alors

$$PQ = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = I_n$$

Donc P est inverible et $Q = P^{-1}$ par théorème d'inversibilité des matrices. □

Remarque :
Pour inverser une matrice, on peut donc voir la matrice à inverser comme une matrice de changement de base. Il suffit donc d'exprimer les vecteurs de la base de départ en fonctions des colonnes de la matrice.

Exemple 3.2 :
Dans $\mathbb{R}^3$, on note la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et donner son inverse.

3.2 Nouvelle représentation d'un vecteur

Théorème 3.3 (Matrice d'un vecteur en changeant de base [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$. On note X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ (*i.e.* $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$) et X' la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$ (*i.e.* $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$). On note enfin P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ (*i.e.* $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$), alors

$$X = PX'$$

En ne cachant pas les bases, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$

Démonstration :

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = PX'$$

□

Remarque :
C'est essentiellement pour ce genre de formule que j'ai fait le choix des notations. On voit bien que les choses s'encastrent bien. C'était le but.

Corollaire 3.4 :
Avec le notations précédentes,

$$X' = P^{-1}X$$

3.3 Nouvelle représentation d'une application linéaire

Théorème 3.5 (Changement de bases et matrice d'application linéaire [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et $p \geq 1$ respectivement. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f)$, P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et Q celle de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. Alors

$$A' = QAP^{-1}$$

On le garde écrit sous cette forme, mais il faut retenir ça sous la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$$

Démonstration :
Soit $x \in E$ dont la matrice colonne dans la base $\mathcal{B}$ est X et dans la base $\mathcal{B}'$ est X'. Soit $y \in F$ dont la représentation matricielle relativement à la base $\mathcal{C}$ est Y et relativement à la base $\mathcal{C}'$ est Y'. On alors

$$y = f(x) \iff Y = AX \iff Q^{-1}Y' = AP^{-1}X' \iff Y' = QAP^{-1}X$$

Or la matrice A' est l'unique matrice telle que

$$y = f(x) \iff Y' = A'X'$$

et donc

$$A' = QAP^{-1}$$

□

Théorème 3.6 (Cas des endomorphismes) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$A' = PAP^{-1}$$

Ce que l'on écrit sous cette forme mais qu'il faut comprendre (et lire) sous la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$$

Exemple 3.3 :
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

En considérant les vecteurs $\varepsilon_1 = e_2 - e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_2 + 2e_3$ et $\varepsilon_3 = e_1 - e_2 + e_3$, exprimer simplement les puissances de A, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Remarque :
Là, selon les conventions de notations prises, on peut voir dans la littératures des formules de changement de bases avec les puissances -1 pas au même endroit. On trouve parfois $A' = P^{-1}AP$. Ça dépend de ce qu'on appelle matrice de passage, quelle est la matrice de passage de référence que l'on considère etc. Mais si on pose $Q = P^{-1}$, avec les notations de ce cours, on trouve alors $A' = QAQ^{-1}$ ce qui permet de retomber sur les autres versions possibles.

Tout ce que vous pourrez trouver dans la littérature donne la même chose à chaque fois. Ce n'est qu'une histoire de dénomination, de notation. Et comme il n'y en a pas de canonique, chacun fait un peu comme il veut.

Il n'y a pas de bonnes ou mauvaises notations. Il faut simplement trouver une notation qui vous conviennent et s'y tenir et être clair au départ sur le choix des notations utilisées (sur leur sens).

3.4 Matrices semblables

Définition 3.2 (Matrices semblables - Relation de similitude) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont *semblables* si $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

Remarque :
Le choix de la position du -1 en puissance n'a aucune importance. En appelant Q la matrice P^{-1}, on change l'inversion de place. La place du -1 dépend du choix du nom des matrices.

Proposition 3.7 (Propriété de la relation de similitude) :
La relation de similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les classes d'équivalences de la relation de similitude sont appelées les classes de similitude.

Démonstration :
C'est de la vérification. Il suffit de vérifier que la relation de similitude est bien une relation d'équivalence.

□

Proposition 3.8 (Caractérisation de matrices semblables par les représentations matricielles) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A et B sont semblables si, et seulement si, elles représente le même endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension n relativement à des bases différentes.

Autrement dit, en utilisant les applications linéaires canoniquement associées :

$$A \sim B \iff \exists f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n),\ \exists \mathcal{B}, \mathcal{C} \text{ bases de } \mathbb{K}^n,\ A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f),\ B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Ensuite, en composant par des isomorphismes de représentation matricielles d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, on peut "déplacer" l'endomorphisme dans E.

Démonstration :
Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors en notant $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on a, par formule de changement de bases

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = PBP^{-1}$$

Donc A et B sont semblables car une matrice de changement de bases est inversible.

Inversement, si A et B sont semblables, on définit f l'application linéaire canoniquement associée à A. En écrivant $A = PBP^{-1}$, on peut voir P comme la matrice d'une famille $\mathcal{B}$ de vecteur relativement à la base canonique. Alors, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ car P est inversible et donc P est la matrice d'un changement de base et P^{-1} est la matrice d'un changement de base dans l'autre sens. Et donc, par représentation matricielle des produits de matrices, B est alors la matrice de f dans la nouvelle base. □

Remarque :
De ce point de vue, les classes de similitudes sont donc les matrices qui représente la même application linéaire indépendamment de la base, *i.e.* une classe de similitude correspond à l'ensemble de toutes les représentations matricielles d'une même application linéaire fixée.

Proposition 3.9 (Produit dans les classes de similitude) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

Alors

(i) $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P^{-1}B^kP$.

(ii) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et dans ce cas, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $A^k = P^{-1}B^kP$.

Démonstration :
La relation est évident pour $k = 0$ et $k = 1$ par définition de P. Supposons $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = P^{-1}B^kP$. Alors

$$A^{k+1} = A^kA = (P^{-1}B^kP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^{k+1}P$$

par associativité du produit matriciel. Et donc la récurrence.

Si A est inversible, alors PAP^{-1} également car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif. Et donc B est inversible. De même pour la réciproque. Enfin, l'inverse d'un produit nous donne ensuite le formule : si $k \in \mathbb{N}$, $A^{-k} = (A^k)^{-1} = (P^{-1}B^kP)^{-1} = P^{-1}(B^k)^{-1}P = P^{-1}B^{-k}P$. □

Remarque :
On peut démontrer le premier facilement aussi en passant par les applications linéaires associées. En effet, A et B représente la même application linéaire f. Alors, par produit de matrice et représentation matricielle, A^k et B^k représente toutes les deux f^k. Et donc sont semblables. Les bases étant inchangées, on a les même matrices de changement de bases. Et donc la formule de changement de bases fournis le résultat.

Exemple 3.4 :
Montrer que $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ sont semblables si et seulement si ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.

Proposition 3.10 (La trace est constante sur les classes de similitude) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables, alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Démonstration :
Ça provient simplement des propriétés de la trace sur le produit :

$$\operatorname{tr}(P^{-1}BP) = \operatorname{tr}(PP^{-1}B) = \operatorname{tr}(B).$$

□

⚠ **!!! ATTENTION !!!**

Ce n'est qu'une implication, évidemment !

Contre-exemple :
Prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Clairement, $\mathrm{tr}(A) = 0 = \mathrm{tr}(B)$. Mais A n'est pas inversible et B l'est. Elles ne peuvent pas être semblables sinon elles représenteraient la même application linéaire qui serait à la fois inversible et non inversible en fonction de la base dans laquelle on la décrit. Mais une application linéaire ne dépend du choix d'aucune base. Donc ☠.

3.5 Matrices équivalentes

Définition 3.3 (Matrices équivalentes) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On dit que A et B sont *équivalentes* si $\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = P^{-1}BQ$.

Remarque :
Ici aussi, le -1 en puissance est tout à fait superflue. On pourrait simplement écrire $A = PBQ$. Mais il est coutumier d'écrire la définition avec un -1 en puissance pour rappeler et faire le lien avec la formule de changement de bases (lien que nous allons faire un peu plus bas).

Proposition 3.11 (La relation d'équivalence est une relation d'équivalence) :
La relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

Démonstration :
Il suffit de le vérifier. □

Proposition 3.12 (Caractérisation des matrices équivalentes) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
A et B sont équivalentes si et seulement si elles représentes la même application linéaire relativement à des bases différentes.

Démonstration :
C'est essentiellement la même démo que pour les matrices semblables. □

Remarque :
Attention ! Dans le cas des matrices équivalentes, les espaces vectoriels ne sont pas les mêmes au départ et à l'arrivée. C'est la généralisation des matrices semblables pour les applications linéaires au sens large et plus seulement les endomorphismes.

Remarque :
Dans le cas où $n = p$, *i.e.* dans le cas où on a des matrices carrées, cela veut dire que les matrices représentes soit une application linéaire entre deux ev distincts et de même dimensions ; soit que les matrices représentes un endomorphismes d'un ev mais relativement à des bases distinctes au départ et à l'arrivée. Autrement dit, la matrice A représente $f : (E, \mathcal{B}) \to (E, \mathcal{B}')$ avec $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E différentes. Les changements de bases qui interviennent ne sont donc pas les mêmes au début et à l'arrivée. Et donc, on a pas les mêmes matrices à gauche et à droite.

Exemple 3.5 :
Montrer que $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si leurs transposées sont équivalentes.

Proposition 3.13 (Lien entre matrices semblables et matrices équivalentes) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables, alors elles sont équivalentes.

Démonstration :
C'est évident. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ La réciproque est fausse, bien entendu.

3.6 Trace d'un endomorphisme

Définition-Propriété 3.4 (Trace d'un endomorphisme) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle *trace de* u la trace d'une matrice représentant u relativement à n'importe quelle base de E. Autrement dit,

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E,\ \operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)).$$

Démonstration :
Il s'agit donc de montre que la trace ne dépend pas de la base choisir pour représenter u. Ce qui est évident puisque la trace est constante sur les classes de similitude.

Donc LA trace de u a bien un sens. □

Proposition 3.14 (propriété de la trace d'applications linéaires.) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ et

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u).$$

Démonstration :
C'est évident via l'isomorphisme de représentation matricielle et la représentation matricielle d'une composée. □

Proposition 3.15 (Trace d'un projecteur [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F, G deux sev supplémentaires de E, $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur sur F parallèlement à G.

Alors $\operatorname{tr}(p) = \dim(F)$.

Démonstration :

Si on considère $\mathcal{C}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

avec $r = \dim(F)$, $n = \dim(E)$. Et donc, par définition de la trace, $\mathrm{tr}(p) = r = \dim(F)$. □

4 Cas des matrices par blocs

On va se placer dans le cas d'une matrice par blocs avec 4 blocs pour commencer, pour simplifier les écritures. La généralisation n'est pas très difficile.

On a vu qu'on peut toujours voir une matrice comme une matrice par blocs. Prenons le cas d'une matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m,p+q}(\mathbb{K})$$

avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension $p+q$ et $n+m$ respectivement. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ représenté par la matrice M. Soit E_1 le sev de E engendré par les p premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ et E_2 le sev engendré par les q derniers vecteurs de $\mathcal{B}$. De même, soit F_1 le sev de F engendré par les n premiers vecteurs de $\mathcal{C}$ et F_2 le sev de F engendré par les m derniers vecteurs de $\mathcal{C}$.

Alors, par construction et par liberté de $\mathcal{B}$, et $\mathcal{C}$, on a $E = E_1 \oplus E_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases adaptées aux sommes directes.

Soit $x \in E$. Alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ par supplémentarité. Alors on peut écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ par bloc où X_1 est la matrice représentative de x_1 et X_2 la matrice représentative de x_2 relativement aux sous-familles des $\mathcal{B}$ que l'on a considérées pour fabriquer les sev E_1 et E_2.

Alors, en faisant le produit de matrices par blocs, le vecteur $u(x) \in F$ est représenté par la matrice

$$MX = \begin{pmatrix} AX_1 + BX_2 \\ CX_1 + DX_2 \end{pmatrix}$$

Puis, par supplémentarité de F_1 et F_2 et isomorphisme de représentation matricielle, la matrice $AX_1 + BX_2$ représente alors la composante de $u(x)$ dans F_1 et $CX_1 + DX_2$ représente la composante de $u(x)$ dans F_2.

On peut généraliser le processus à un nombre quelconque de sous-espaces et donc de blocs.

Remarque :
C'est ce qu'on utiliser pour montrer déterminer la forme d'une matrice représentative d'une projection ou d'une symétrie relativement à une "bonne" base.

On rappelle que toute application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions sur des sev supplémentaires. La version matricielle (représentation) de ce théorème est le découpage par blocs de colonnes.

Des supplémentaires dans l'espace d'arrivée permet un découpage par blocs de lignes.

Et donc la conjonction des deux, permet un découpage des matrices représentantes par blocs classiques.

Proposition 4.1 (Matrice par bloc et sev stables pour les endomorphismes) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F, G deux sev supplémentaires de E de dimension p et q respectivement. Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Alors, on peut écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ par blocs sous la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Alors :

(i) F est stable par u si et seulement si $C = 0$.

(ii) G est stable par u si et seulement si $B = 0$.

Démonstration :
Si $C = 0$, par définition de la représentation matricielle, $u(F) \subset F$. Donc F est stable par u.

Réciproquement, si $u(F) \subset F$, alors l'image d'une base F est envoyé dans F et donc la définition de la représentation matricielle donne la forme annoncée ($C = 0$). □

Proposition 4.2 (Généralisation) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $E_1, \ldots, E_n$ des sev tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par bloc si, et seulement si, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, E_i stable par u.

Remarque :
Dans le cas où tous les E_i sont stables (et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs, on peut alors considérer $u_i = u||_{E_i} \in \mathcal{L}(E_i)$. Et dans ce cas, u est entièrement déterminée par la connaissance des u_i et chacun des blocs diagonaux de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ correspond à la représentation matricielle de u_i relativement à la base E_i choisie pour fabriquer $\mathcal{B}$.

Exemple 4.1 :

On considère la matrie $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 4.1 (Endomorphisme induit sur un espace stable) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F un sev de E, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si F est stable par u, on peut définir l'endomorphisme induit par u sur F, noté $u||_F \in \mathcal{L}(F)$ qui sont les restrictions de u à F.

Donc $\forall x \in F$, $u||_F(x) = u(x)$.

Remarque :
Le cas classique concerne la situation d'un endomorphisme dont la représentation matricielle est celle d'une matrice diagonale par bloc.

5 Rang d'une matrice

5.1 Définition

Définition 5.1 (Rang d'une matrice) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

On appelle rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la famille de vecteurs $(C_1(A), \dots, C_n(A))$ en tant que vecteurs de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Donc $\mathrm{rg}(A)$ est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 5.1 :

Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 5.1 (Rang d'une matrice d'une famille de vecteurs [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $p \geq 1$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n \geq 1$ vecteurs de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de la famille $\mathcal{F}$. Alors

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration :
Soit $\varphi : E \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ l'application linéaire définie par $\varphi(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. On sait que c'est un isomorphisme d'espace vectoriels. On a donc $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $C_j(A) = \varphi(x_j)$. On a donc

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = \dim \mathrm{Vect}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$$

Mais comme φ est un isomorphisme, on a

$$\dim \mathrm{Vect}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = \dim \varphi(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n)$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème 5.2 (Rang d'une matrice d'une application linéaire [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie respectives $n \geq 1$ et $p \geq 1$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{rg}(f)$$

Démonstration :
Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Et donc l'égalité. □

5.2 Propriété du rang d'une matrice

Proposition 5.3 (Majoration du rang d'une matrice) :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}\, A \leq \min(n, p)$$

Démonstration :
On sait que si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathrm{rg}\, f \leq \min(\dim E, \dim F)$. D'où le résultat par l'isomorphisme matrices / applications linéaires □

Proposition 5.4 (Rang d'un produit de matrice) :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$. De plus :

- Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$
- Si $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration :
Cela vient de des résultats sur les rangs des applications linéaires. □

Proposition 5.5 (Le rang est constant sur les classes d'équivalences) :
Le rang est constant sur les classes d'équivalences de l'équivalence matricielle, *i.e.* $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\forall Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(QAP^{-1})$.

Démonstration :
Ça vient du fait que le rang d'une matrice est conservé par multiplication par une matrice inversible à gauche ou à droite. □

Théorème 5.6 (Caractérisation d'inversibilité par le rang [✓]) :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

(ii) $\mathrm{rg}\, A = n$

Démonstration :
Si on note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ et on utilise le résultat sur les applications linéaires. □

Théorème 5.7 (Version matriciel du théorème du Rang) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors
$$\mathrm{rg}(A) + \dim(\ker A) = p$$

Démonstration :
C'est le théorème du rang appliqué à l'application linéaire canoniquement associé à A. □

Proposition 5.8 (Équivalence à une matrice par bloc avec le rang) :
Toute matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et de rang r est équivalente à une matrice par bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$$

Démonstration :
On note $r = \mathrm{rg}(A)$. Si $r = 0$, alors $A = 0$ et donc c'est évident. On supposera donc que $r \geq 1$.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ canoniquement associée à A. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. On a donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$.

Soit H un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathcal{E}_1$ une base de H. Soit $\mathcal{E}_2$ une base de $\ker(f)$. Alors $\mathcal{C} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ adaptée à la somme directe $H \oplus \ker(f)$.

Soit maintenant H' un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans $\mathbb{K}^p$. On a donc $\mathbb{K}^p = \mathrm{Im}(f) \oplus H'$. Comme f établit un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im}(f)$, $f(\mathcal{E}_1)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Soit $\mathcal{E}_3$ une base de H'. Alors $\mathcal{C}' = (f(\mathcal{E}_1), \mathcal{E}_3)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ adaptée à la somme directe $\mathrm{Im}(f) \oplus H'$.

On note enfin $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p})$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n})$. On a donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = Q^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(f) P$$

Mais la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est très simple. Elle est de la forme

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{cc} f(H) & f(\ker f) \\ f(\mathcal{E}_1) & f(\mathcal{E}_2) \\ \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(f) = & \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{lll} r & f(\mathcal{E}_1) & \mathrm{Im}(f) \\ p-r & \mathcal{E}_3 & H' \end{array} \end{array}$$

Et la formule de changement de base achève la démo. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ C'est encore vraie pour les matrice carrées. En revanche, une matrice carrée n'est (en général) pas *semblable* à une telle matrice !

Proposition 5.9 :
Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à une matrice par bloc $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration :
C'est évident puisque le rang est invariant sur les classes d'équivalences. □

Proposition 5.10 :
Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Démonstration :
Le sens direct correspond au rang constant sur les classes d'équivalences.

Le sens indirecte provient de la transitivité de la relation d'équivalence avec la proposition précédente. □

Proposition 5.11 (Le rang est invariant par transposition [✓]) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left({}^tA\right)$

Démonstration :
On reprend le théorème précédent. En transposant cette relation et en utilisant le produit d'une transposée et que le produit d'une matrice inversible est inversible et le rang du produit d'une matrice par une matrice inversible, on a le résultat. □

Exemple 5.2 :

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la même que dans l'exemple précédent.

5.3 Matrices extraites

Définition 5.2 (Matrice extraite) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle *matrice extraite de* A, ou sous-matrice de A, toute matrice $A' = (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ avec $I \subset \{1, \ldots, n\}$ et $J \subset \{1, \ldots, p\}$. On notera $A|_{I \times J}$ la matrice extraite.

Exemple 5.3 :

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, on a $A|_{\{1,3\} \times \{2,4\}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

Proposition 5.12 (Rang et matrice extraite) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice R extraite de A, $\mathrm{rg}(R) \leq \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration :
On a $R = A|_{I \times J}$ avec $I \subset \{1, \ldots, n\}$ et $J \subset \{1, \ldots, p\}$.

La matrice $A|_{\{1,\ldots,n\} \times J}$ est obtenu par suppression de certaines colonnes de A. Autrement dit, les colonnes de $A|_{\{1,\ldots,n\} \times J}$ sont des colonnes. Et donc, par définition du rang d'une matrice, $\mathrm{rg}(A|_{\{1,\ldots,n\} \times J}) \leq \mathrm{rg}(A)$.

Puis, les lignes de $R = A|_{I \times J}$ sont des lignes de $A|_{\{1,\ldots,n\} \times J}$ (*i.e.* on a enlevé des lignes). Par invariance du rang par transposition et définition du rang, on a donc $\mathrm{rg}(R) \leq \mathrm{rg}(A|_{\{1,\ldots,n\} \times J})$ et donc le résultat. $\square$

Proposition 5.13 (Caractérisation du rang par les matrices extraites) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A.

Démonstration :
Si $A = 0$, elle n'a pas de matrice extraite inversible et son rang est nul.

Supposons $A \neq 0$. Soit r la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A. D'après le lien entre rang et matrice extraite, on en déduit $r \leq \mathrm{rg}(A)$. Il suffit donc maintenant d'extraire une matrice carrée inversible de A de taille $\mathrm{rg}(A)$.

Par définition, $\mathrm{rg}(A)$ est le rang des colonnes de A. Donc il existe une sous-famille de $\mathrm{rg}(A)$ éléments des colonnes de A qui est libre (et qui forme donc une base de $\mathrm{Im}(A)$). Autrement dit, $\exists J \subset \{1, \ldots, p\}$ de $\mathrm{rg}(A)$ éléments telle que $\mathrm{rg}(A|_{\{1,\ldots,n\}\times J}) = \mathrm{rg}(A)$ (on enlève, par principe d'élimination dans un Vect les colonnes "inutiles").

On réitère sur les lignes : par transposition et invariance du rang par transposition, $\mathrm{rg}(A)$ est le rang de la famille des lignes de la matrice $A|_{\{1,\ldots,n\}\times J}$. Donc, par principe d'élimination dans un Vect (ou par théorème de la base extraite), on peut extraire des lignes de $A|_{\{1,\ldots,n\}\times J}$ une famille de $\mathrm{rg}(A)$ lignes linéairement indépendantes (et qui forment donc une base de l'ev engendré par les lignes). Autrement dit, $\exists I \subset \{1, \ldots, n\}$ de $\mathrm{rg}(A)$ éléments telle que $\mathrm{rg}(A|_{I\times J}) = \mathrm{rg}(A|_{\{1,\ldots,n\}\times J})$.

Alors $\mathrm{rg}(A|_{I\times J}) = \mathrm{rg}(A)$, $A|_{I\times J}$ est une matrice extraite de A par définition et I et J contiennent toutes les deux $\mathrm{rg}(A)$ éléments. Donc $A|_{I\times J} \in \mathcal{M}_{\mathrm{rg}(A)}(\mathbb{K})$ est carrée. Sa taille est égale à son rang, donc $A|_{I\times J}$ est inversible. □

Exemple 5.4 :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 3.