DM 6

Polynômes : Calcul de $\zeta(2)$

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 19 Mars 2024

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
P_1(X) &= \frac{1}{2i}((X+i)-(X-i)) \\
&= 1 \\
P_2(X) &= \frac{1}{2i}((X^2+2iX-1)-(X^2-2iX-1)) \\
&= 2X \\
P_3(X) &= \frac{1}{2i}((X^3+3iX^2-3X-i)-(X^3-3iX^2-3X+i)) \\
&= 3X^2-1 \\
P_4(X) &= \frac{1}{2i}((X^4+4iX^3-6X^2-4iX+1)-(X^4-4iX^3-6X^2+4iX+1)) \\
&= 4X^3-4X
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\overline{P_n}(X) = \frac{1}{-2i}((X-i)^n - (X+i)^n) = \frac{1}{2i}((X+i)^n - (X-i)^n) = P_n(X)$$

Donc par caractérisation des polynômes à coefficients réels, $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\deg(X+i)^n = n = \deg(X-i)^n$ et ces deux polynômes sont unitaires. Donc le polynômes P_n est de degré $\leq n-1$. Mais le coefficient de X^{n-1} dans $(X+i)^n$ est $\binom{n}{n-1}i = ni$ et dans $(X-i)^n$ est $-\binom{n}{n-1}i = -ni$. Donc les deux coefficients ne sont pas de même signe, donc ils ne disparaissent pas dans la différence et donc P_n est de degré $n-1$ de coefficient dominant $\frac{2ni}{2i} = n$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
P_n(-X) &= \frac{1}{2i}((-X+i)^n - (-X-i)^n) \\
&= \frac{(-1)^n}{2i}((X-i)^n - (X+i)^n) = (-1)^{n+1}P_n(X)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $P_n(-X) = P_n(X)$ si n est impaire et $P_n(-X) = -P_n(X)$ si n est paire. Donc le polynôme P_n est paire si et seulement si n est impaire et P_n est impaire si et seulement si P_n est paire.

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-i| = |z+i|$. Géométriquement, cette relation veut dire que z se trouve à équidistance de i et de $-i$, donc z est sur la médiatrice de i et $-i$ donc sur la droite réelle. Donc z est réel.

Algébriquement, on a :

$$\begin{aligned}
|z-i| = |z+i| &\iff |z-i|^2 - |z+i|^2 = 0\\
&\iff (z-i)(\overline{z}+i) - (z+i)(\overline{z}-i) = 0\\
&\iff 2i(z-\overline{z}) = 0\\
&\iff z = \overline{z}
\end{aligned}$$

et donc $z \in \mathbb{R}$ par caractérisation des réels dans $\mathbb{C}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ une racine de P_n (on sait qu'il en existe grâce au théorème de D'Alembert-Gauss car $\deg(P_n) = n-1 \geq 1$). On a donc

$$\begin{aligned}
P_n(z) = 0 &\iff (z-i)^n = (z+i)^n\\
&\implies |z-i|^n = |z+i|^n\\
&\iff |z-i| = |z+i|
\end{aligned}$$

car le module est positif (donc on peut prendre la racine n-ème). Et par la question précédente, toutes les racines de P_n sont donc réelles.

(c) Soit $n \geq 2$. On peut voir le polynôme P_n en tant que polynôme à coefficients complexes puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Mais grâce au théorème de D'Alembert-Gauss, on sait que tous polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. En particulier, P_n est de degré $n-1 \geq 1$ et donc P_n est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Mais d'autres part, on a vu que toutes les racines de P_n sont des racines réelles. Donc tous les facteurs irréductibles $X - \alpha$ de $\mathbb{C}[X]$ divisant P_n sont en réalité des polynômes à coefficient réels. Donc dans son expression en produit de facteur irréductible dans $\mathbb{C}[X]$, tous les facteurs sont des polynômes réels et le coefficients multiplicatif devant est le coefficients dominant de P_n qui est un réel puisque $P_n \in \mathbb{R}[X]$. Donc P_n est le produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{R}$ avec un coefficient réel et donc P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Formulé autrement, on sait que P_n est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Donc il s'écrit sous la forme $P_n(X) = \operatorname{coeff\,dom}(P_n)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k) = n\prod_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k)$ où les $\alpha_k \in \mathbb{C}$ sont les racines de P_n comptés avec multiplicités (et car $\deg(P_n) = n-1$). Mais toutes les racines de P_n sont réelles, donc $\forall k \in \{1,\dots,n-1\}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$. On en déduit donc $\forall k \in \{1,\dots,n-1\}$, $X - \alpha_k \in \mathbb{R}[X]$. Et donc la décomposition se fait en fait dans $\mathbb{R}[X]$ et donc P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

(d) Soit $n \geq 2$. On va résoudre $\widetilde{P_n}(z) = 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$, une racine de P_n. Tout d'abord, observons que $\widetilde{P_n}(i) = (2i)^{n-1} \neq 0$. Donc $z \neq i$. Puis

$$\begin{aligned}
\widetilde{P_n}(z) = 0 &\iff (z+i)^n = (z-i)^n\\
&\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \qquad \text{car } z \neq i\\
&\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\ \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\
&\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\ z+i = (z-i)e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\
&\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ z\left(1 - e^{2ik\pi/n}\right) = -i\left(1 + e^{2ik\pi/n}\right)
\end{aligned}$$

Or, si $k = 0$, on a $0 = -2i$ ce qui est absurde donc $k \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}
\widetilde{P_n}(z) = 0 &\iff \exists k \in \{1,\dots,n-1\}, z = -i\frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}}\\
&\iff \exists k \in \{1,\dots,n-1\}, z = -i\frac{e^{-ik\pi/n}+e^{ik\pi/n}}{e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n}}\\
&\iff \exists k \in \{1,\dots,n-1\}, z = \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des racines de P_n est $\left\{\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}, k \in \{1,\dots,n-1\}\right\}$ (ensemble dans lequel il y a peut être des doublons).

(e) On a déjà vu que pour tout $n \geq 2$, P_n est de degré $n-1$. Montrons qu'on a trouvé $n-1$ racines distinctes à la question précédentes. Soit $k, \ell \in \{1, \ldots, n-1\}$ telles que $\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = \frac{\cos(\ell\pi/n)}{\sin(\ell\pi/n)}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = \frac{\cos(\ell\pi/n)}{\sin(\ell\pi/n)} &\iff \cos(k\pi/n)\sin(\ell\pi/n) = \cos(\ell\pi/n)\sin(k\pi/n) \\
&\iff \sin\left(\frac{(\ell-k)\pi}{n}\right) = 0 \\
&\iff \frac{(\ell-k)\pi}{n} \equiv 0\ [\pi] \\
&\iff \ell \equiv k\ [n]
\end{aligned}$$

Autrement dit, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell = k + np$. Mais $\ell, k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Donc $p = 0$ et donc $k = \ell$. Autrement dit, toutes les racines de P_n sont distinctes.

Donc on a trouvé $n-1$ racines distinctes pour P_n qui est de degré $n-1$. Donc P_n a autant de racines réelles (comptés avec multiplicité, c'est à dire qu'il peut y avoir des doublons), que son degré. Donc P_n est scindé.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a facilement $v_n - u_n = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'autre part, $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - 1/n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{n-(2n+1)(n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{-2n^2-2n-1}{n(n+1)^2} \leq 0$ et donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Ainsi, on a une suite croissante, une suite décroissante dont la différence tend vers 0. Donc les deux suites sont adjacentes.

(b) Par propriété sur les suites adjacentes, on sait que les deux suites, donc $(u_n)_{n\geq 1}$ en particulier, converge vers une limite commune. On note $\zeta(2)$ la limite de (u_n) (et donc (v_n)).

(c) Soit $n \geq 1$. Comme les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, par théorème de la limite monotone, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \zeta(2) \leq v_n$. On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\zeta(2) - u_n| \leq |v_n - u_n| = \frac{1}{n}$$

4. (a) On va commencer par montrer l'unicité (même si elle est contenu dans l'existence). Soit donc $S \in \mathbb{R}[X]$ pair. On suppose donc qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 tel que $S(X) = R_1(X^2) = R_2(X^2)$. Alors on a clairement $(R_1 - R_2)(X^2) = 0$, en particulier, on en déduit que le polynôme $R_1 - R_2$ a une infinité de racines et est donc nul. Donc $R_1 = R_2$. D'où l'unicité.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $S \in \mathbb{R}[X]$ pair. Si $S = 0$, le polynôme $R = 0$ convient. Sinon on pose $S(X) = \sum_{k=0}^{n} s_k X^k$ avec $s_0, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$ et $n = \deg(S) \in \mathbb{N}$. Comme S est pair, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $s_{2k+1} = 0$. En particulier, n est pair. Ainsi $S(X) = \sum_{k=0}^{d} s_{2k} X^{2k}$ avec $d = n/2 \in \mathbb{N}$. On pose alors $R(X) = \sum_{k=0}^{d} s_{2k} X^k$. Alors R est bien un polynôme puisque la suite de ses coefficients est une suite presque nulle. Et bien sûr, $R(X^2) = \sum_{k=0}^{d} s_{2k} (X^2)^k = S(X)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $S \in \mathbb{R}[X]$ tel qu'il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S(X) = R(X^2)$. On en déduit donc $S(-X) = R((-X)^2) = R(X^2) = S(X)$ et donc S est paire.

On remarquera que dans la construction de R, les coefficients sont donnés par les coefficients de S. Donc les coefficients sont uniquement déterminés par S et donc l'unicité aussi grâce à ça.

(b) On a montré dans une question précédente que P_n est paire si et seulement si n est impaire. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, P_{2n+1} est paire. Et donc par la question précédente, on sait qu'il existe un unique polynôme $R_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n(X) = R_n(X^2)$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que P_{2n+1} est de degré $2n$. Donc le polynôme $R_n(X^2)$ est de degré $2n$. Or, par composé, le degré de $R_n(X^2)$ est de degré $\deg(X^2)\deg(R_n) = 2\deg(R_n)$. On en déduit donc $\deg(R_n) = n$.

Par composition de polynôme, on sait que le coefficient dominant de $R_n(X^2)$ est obtenu en multipliant le coefficient dominant de X^2 et de R_n. Mais X^2 étant unitaire, le coefficient dominant de $R_n(X^2)$ est donc simplement égale au coefficient dominant de R_n. Mais d'un autre côté, on doit avoir le coefficient dominant de P_{2n+1} qui est $2n+1$. Donc le coefficient dominant de R_n qui est de degré n est $2n+1$.

De même, par composition, le coefficient de X^{n-1} de R_n va permettre d'avoir le coefficient de X^{2n-2} de P_{2n+1}. Il faut donc déterminer le coefficient de X^{2n-2} de P_{2n+1}. On a $P_{2n+1}(X) = \frac{1}{2i}((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1})$. Le coefficient de X^{2n-2} de R_n est donc obtenue comme la somme des termes de X^{2n-2} dans les deux coefficients binomiaux. Le coefficient de X^{2n-2} dans P_{2n+1} est donc $\frac{1}{2i}\left(\binom{2n+1}{2n-2}i^3 - \binom{2n+1}{2n-2}(-i)^3\right) = -\binom{2n+1}{2n-2} = -\frac{(2n+1)!}{(2n-2)!\times 6} = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = -\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà vu que les racines de P_{2n+1} sont les $\frac{\cos(k\pi/(2n+1))}{\sin(k\pi/(2n+1))} = \frac{1}{\tan(k\pi/(2n+1))}$ avec $k \in \{1, \ldots, 2n\}$. Donc les $\frac{1}{\tan(k\pi/(2n+1))^2}$ avec $1 \leq k \leq 2n$ sont des racines de R_n. Mais la tangente est une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$, donc pour $1 \leq k \leq n$, les $\tan(k\pi/(2n+1))$ ont donc n valeurs distinctes strictement positives et donc $\tan(k\pi/(2n+1))^2$ a aussi n valeurs distinctes strictement positives. C'est toujours le cas en passant à l'inverse. On a donc trouvé n racines distinctes de R_n qui est de degré n. Donc R_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ et son coefficient dominant est $2n+1$, d'où

$$\begin{aligned} R_n(X) &= (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan(k\pi/(2n+1))^2}\right) \\ &= (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{\cos(k\pi/(2n+1))^2}{\sin(k\pi/(2n+1))^2}\right) \end{aligned}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les relations coefficients/racines, on sait que la somme des racines de R_n est proportionnelle à son coefficient devant X^{n-1} car R_n est de degré n. Ce coefficient est $-\frac{n(4n^2-1)}{3}$ et le coefficient dominant de R_n est $2n+1$, donc on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\pi/(2n+1))^2}{\sin(k\pi/(2n+1))^2} = -\frac{-\frac{n(4n^2-1)}{3}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

5. on pose $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n(k) = \frac{k\pi}{2n+1}$.

(a) On considère, pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$, $f(\theta) = \theta - \sin(\theta)$ et $g(\theta) = \tan(\theta) - \theta$. Ces deux fonctions sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \pi/2[$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. On a

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[,\ f'(\theta) = 1 - \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad g'(\theta) = -\tan(\theta)^2$$

On en déduit donc que f' est strictement positive et g' strictement négative sur $]0, \pi/2[$, donc f est strictement croissante et g est strictement décroissante sur cet intervalle. Or $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. Donc en particulier $\forall \theta \in]0, \pi/2[$, $f(\theta) \geq 0$ et $g(\theta) \leq 0$ ce qui donne les deux dernières inégalités à montrer. D'autres part, la fonction sinus est une bijection croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$ et $\sin(0) = 0$, donc sa restriction à $]0, \pi/2[$ est strictement positive. Ce qui montre la dernière inégalité manquante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc

$$0 < \frac{\pi}{2n+1} \leq \theta_n(p) = \frac{p\pi}{2n+1} \leq \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc

$$0 < \sin(\theta_n(p)) \leq \theta_n(p) \leq \tan(\theta_n(p))$$

par la question précédente et par suite, en passant l'inégalité précédente au carré et en passant à l'inverse,

$$0 < \frac{1}{\tan(\theta_n(p))^2} = \frac{\cos(\theta_n(p))^2}{\sin(\theta_n(p))^2} \leq \frac{1}{\theta_n(p)^2} \leq \frac{1}{\sin(\theta_n(p))^2} = 1 + \frac{\cos(\theta_n(p))^2}{\sin(\theta_n(p))^2}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité précédente nous fournit

$$\forall p \in \{1, \ldots, n\},\ \frac{\cos(\theta_n(p))^2}{\sin(\theta_n(p))^2} \leq \frac{(2n+1)^2}{p^2\pi^2} \leq 1 + \frac{\cos(\theta_n(p))^2}{\sin(\theta_n(p))^2}$$

d'où l'on a, par sommation,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\cos(\theta_n(p))^2}{\sin(\theta_n(p))^2} \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \leq n + \sum_{p=1}^{n} \frac{\cos(\theta_n(p))^2}{\sin(\theta_n(p))^2}$$

et grâce à la relation établit entre coefficient et racines de R_n, on trouve

$$\frac{n(2n+1)}{3} \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} u_n \leq n + \frac{n(2n+1)}{3}$$

d'où

$$\frac{n\pi^2}{3(2n+1)} \leq u_n \leq \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{n\pi^2}{3(2n+1)}$$

Mais les deux suites aux extrémités converge toutes deux vers $\frac{\pi^2}{6}$, d'où l'on déduit, par théorème des gendarmes, que (u_n) est convergente et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$