DS 9
Analyse Asymptotiques - Matrices

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 3 Avril 2024

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Analyse) :
Le but de ce problème est de montrer que la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Ce sujet a déjà été fait en partie dans un DS précédent.

Partie 1 : Étude de fonction

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, puis de la prolonger en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On admettra le résultat suivant, qui a été déjà démontré dans un DS précédent.

Théorème 0.1

Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \alpha$, alors $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \beta$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un développement limité à l'ordre n de f en 0.
2. (a) Montrer que f est dérivable en 0, puis sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée en tout point.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ sans utiliser la même méthode que pour la question 2a.

3. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On admettra qu'il existe deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tels que

$$\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2^n x^{n-1}} \widetilde{P_n}(x) + \frac{\sin(\sqrt{x})}{2^n x^{n-1}\sqrt{x}} \widetilde{Q_n}(x).$$

   De plus, $P_1(X) = 0$, $Q_1(X) = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} P_{n+1}(X) = Q_n(X) + 2XP_n'(X) - 2(n-1)P_n(X) \\ Q_{n+1}(X) = 2XQ_n'(X) - (2n-1)Q_n(X) - XP_n(X). \end{cases}$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^{n-1} f^{(n)}(x)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $n-1$ (on ne cherchera pas à calculer les coefficients).

   (c) Calculer P_2, Q_2, P_3, Q_3. Établir le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto x^2 f^{(3)}(x)$, puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

   (a) Justifier que $f^{(n+1)}$ admette un développement asymptotique en 0 de la forme

$$f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x} + a_0 + o(1).$$

   (b) En utilisant le théorème 0.1 appliqué à une fonction judicieusement choisie, montrer que $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}$ admette le développement asymptotique en 0 :

$$f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}} - \cdots - \frac{a_2}{x} + a_1 \ln(x) + \ell + o(1).$$

   (c) En déduire que si la fonction $f^{(n)}$ admet une limite finie en 0, alors $f^{(n+1)}$ également (on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde).

   (d) Montrer alors par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

5. À l'aide de développement limité de f de la question 1, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $f^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Problème 2 (Hyperplans de matrices) :
Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\mathcal{B}_n = (E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie A : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(AM) \end{array}$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Soit $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $\varphi_A(E_{i,j})$.

4. Montrer que
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \varphi_A \end{array}$$
est un isomorphisme.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Montrer que $\exists A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \neq 0$ et $H = \ker(\varphi_A)$.
6. On note $r = \mathrm{rg}(A)$ et $J_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les r premiers coefficients diagonaux qui sont égaux à 1. Montrer $\exists U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi_A(M) = \mathrm{tr}(J_r VMU)$.
7. On introduit la matrice :
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $P = 0 \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ PX = 0$.
   (b) Soit $X = (x_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Calculer le produit NX et en déduire la valeur de $N^n X$.
   (c) En déduire que N est inversible et calculer $\mathrm{tr}(J_r N)$.
8. En déduire que $H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$.

Partie B : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que H est stable par multiplication si :
$$\forall M, N \in H,\ MN \in H.$$

9. On suppose dans cette question que $n = 2$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{K})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ stable par multiplication.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication. Dans la suite du problème, on montrera que $n = 2$.

D'après la partie précédente, $\exists A, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \neq 0$, $H = \ker(\varphi_A)$ et $Q \in H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

10. Justifier que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $Q^k \in H$.
11. Déterminer $N \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(Q^k)_{1\leq k\leq N}$ soit liée.
12. En déduire que $I_n \in H$.
13. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Soit $B \in H$.

14. Montrer que $H \subset \ker(\varphi_{BA})$.
15. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $BA = \lambda A$.

On note
$$F = \{M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ m_{2,1} = \dots = m_{n,1} = 0\}.$$

16. Déterminer la dimension de F.
17. En utilisant l'isomorphisme de représentation matricielle, on peut montrer que H est isomorphe à un sous-espaces vectoriels de F. En déduire alors que $\dim(H) \leq n^2 - n + 1$, puis que $n = 2$.