NOM :
Prénom :

Mardi 23 Avril 2024

Interrogation 23

Représentation Matricielle

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Caractérisation du rang d'une matrice par les matrices extraites.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A)$ est la plus grande taille des matrices carrées inversibles extraites de A.

2. Formule de changement de bases pour une application linéaire (générale).

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ bases de F, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Autrement dit, en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$, A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et A' la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, alors $A' = Q^{-1}AP$.

3. Définition du rang d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est la dimension de l'ev engendré par les colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A)))$.

4. Matrice d'un isomorphisme.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $n = \dim(E) = \dim(F)$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{B}'$ base de F. Alors $f \in \mathrm{GL}(E, F) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Et dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

5. Définition de la trace d'un endomorphisme.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E. On définit $\mathrm{tr}(f)$ par $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ (car la trace est invariant sur les classes de similitudes, donc ne dépend pas de la base choisie pour écrire la base de f).

6. Équivalence à une matrice par blocs avec le rang.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$. Autrement dit, $\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0_{p-r,r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} Q$.

7. Définition de matrices semblables.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables si $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

8. Définition de la matrice représentative d'un vecteur.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$. Alors $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Exercice 2 :
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x - y + 2z)$. On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et une base de $\ker(f)$.

On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} && \text{iso repr mat} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + 3C_2 \end{array} \end{aligned}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= 2$$

Par théorème du rang, on a donc $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \operatorname{rg}(f) = 3 - 2 = 1$. Or, matricielle, $C_1(A) - C_2(A) = C_3(A)$. Donc, par définition de $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1)) - \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_2)) - \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_3)) = 0$. Et donc, par linéarité de la représentation matricielle, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1 - e_2 - e_3)) = 0$. Donc, par isomorphisme de représentation matricielle, $f(e_1 - e_2 - e_3) = 0$. Et donc, par définition du noyau, $e_1 - e_2 - e_3 \in \ker(f)$.

Or $e_1 - e_2 - e_2 = (1, -1, -1) \neq 0$ et $\dim(\ker(f)) = 1$. Donc $\ker(f) = \operatorname{Vect}((1, -1, -1))$.