



Chapitre 23 - TD :

Déterminants

Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

24 avril 2024

1 Calcul de déterminant

Exercice	Indications
1	Ce sont les premiers calculs de déterminant. Le but, c'est de découvrir comment on fait sur des exemples simples. Le but est de manipuler les propriétés du déterminant.
2	C'est indiqué.
3	Écrire la matrice avec suffisamment de coefficients pour "voir" des manipulations à faire.
4	C'est une forme de déterminant classique. On peut s'inspirer de l'exercice précédent.
5	On peut s'inspirer des deux exos précédents.
6	Pour le premier déterminant, on peut se débrouiller pour avoir une ligne ou une colonne constante. Ce qui permet de pouvoir utiliser cette colonne pour simplifier grandement la forme du déterminant. Pour le second déterminant, le même genre de principe s'applique aussi.
7	C'est indiqué. Il faut faire des récurrences. Et pour ça, il faut commencer par établir des relations de récurrences.
8	Comme au-dessus.

2 Exercices plus théoriques

Exercices	Indications
9	Matrice antisymétrique + propriété du déterminant = ?
10	C'est un 0 de l'autre côté du signe égal.
12	Le but de cet exo est d'exploiter une erreur classique d'étudiant et de chercher les matrices pour lesquelles le déterminant est linéaire en les matrices.
13	S'inspirer de 9
14	C'est une matrice classique. Utiliser la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne. Ça simplifie beaucoup les choses.
15	C'est un exercices classique de 2eme année, mais guidé. Pour le calcul du déterminant, le but est d'essayer de factoriser une ligne ou une colonne pour n'avoir plus que des 1. On peut alors utiliser cette ligne ou colonne de 1 pour simplifier la forme de la matrice.

16	C'est indiqué.
17	Un polynôme ne peut pas s'annuler une infinité de fois.
18	Faire une manip sur A qui la transforme en une matrice dont les coeff sont des puissances de 2.
19	Il suffit d'écrire et de se souvenir des propriétés du déterminant par rapport aux colonnes.
20	On a des choses à dire en terme de passage des complexes aux réels. Dont certaines sur les polynômes.

3 Déterminant par blocs

Exercices	Indications
21	Repenser à l'exercice du chapitre sur les matrices où l'on introduit les complexes sous forme matricielle.
22	On pose $r = \text{rg}(AB)$. Alors la matrice AB est équivalente à une matrice par bloc dont le déterminant est facile à calculer. Il ne reste plus qu'à regarder ce que ça donne.

4 Applications du déterminant

Exercices	Indications
23	Ce sont des systèmes. Et il y a un lien entre systèmes et déterminant.
24	Idem.
25	Re-idem avec paramètres.
26	Reprendre la def du déterminant et trace d'un endomorphisme. Ensuite, ne pas se tromper "d'étage".
27	Sarrus est votre ami. Et un polynôme ne peut pas avoir trop de racines.
28	Pour la première question, considérons la matrice dont les coefficients correspondent aux parités des éléments de A et calculer son déterminant. Pour la deuxième question, étudier le rang de M . Utiliser aussi la définition de M pour pouvoir étudier son noyau.

5 Comatrices, rang etc

Exercices	Indications
29	C'est un calcul d'inverse de matrices. C'est du calcul. On calcule.
30	Yoda vous a prévenu.
31	Écrire le lien entre B et A . Puis faire une disjonction de cas selon le $\det(A)$. On utilisera aussi pour les représentations matricielles pour donner un sens à la relation obtenue dans le cas "dur". Pour la question 2, il faut bien exploiter la relation $AC = 0$ pour écrire la matrice C sous une forme particulière. Sans oublier $\text{rg}(A) = n - 1$.
32	C'est facile. Il y a un lien évident entre les matrices et les comatrices.

33

Sarrus, c'est vraiment pratique. C'est Bézout clairement. Mais il faut le "remonter" au niveau matriciel. C'est là que ça se complique. En choisissant bien les matrices et en utilisant la question 1, c'est pas trop dur.