



DM 7

Représentation matricielle

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 23 Avril 2024

Problème 1 (Diagonalisation guidée) :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note u l'application linéaire canoniquement associée à A .

1. (a) Déterminer le noyau de u . On précisera sa dimension et une base.
(b) En déduire le rang de A .
(c) Calculer A^2 et A^3 . Donner un lien entre A et A^3 .
2. On considère un couple $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ avec $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.
(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u^n(x) = \lambda^n x$.
(b) En déduire que $\lambda^3 = \lambda$. Quelles sont les valeurs possibles de λ ?
On notera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ces valeurs. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $E_{\lambda_i} = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = \lambda_i x\}$.
(c) Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer E_{λ_i} . On montrera que les E_{λ_i} sont des droites vectorielles engendrées par des vecteurs e_i .
3. On considère $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la famille de vecteurs obtenus à la question précédente.
(a) Démontrer que la famille $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Écrire la matrice D de u dans la base $\mathcal{E}$.
(c) On appelle P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} . Que représente P^{-1} ?
(d) Écrire une relation liant P, A, D et P^{-1} .

Problème 2 (Hyperplans de matrices - fin) :

ON souhaite montrer qu'il n'y a que pour les matrices 2×2 qu'il existe des hyperplans de matrices stables par produit. Autrement dit, on reprend le DS et on termine le morceaux de preuve manquant.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que H est stable par multiplication si :

$$\forall M, N \in H, MN \in H.$$

Soit $B \in H$. On a déjà montré (cf DS) que $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $BA = \lambda A$.

Soit f (resp. g) l'application linéaire canoniquement associée à A (resp. B). On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On note

$$F = \{M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), m_{2,1} = \dots = m_{n,1} = 0\}.$$

1. Montrer qu'il existe $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ telle que $e'_1 \in \text{Im}(f)$.
2. On note B' la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$. Montrer que $B' \in F$.
3. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Montrer que

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$$

est un automorphisme.

4. Exprimer B' en fonction de P et B .
5. Déterminer la dimension de F .
6. En déduire que $\dim(H) \leq n^2 - n + 1$, puis que $n = 2$.