Chapitre 24 - TD :
Intégration sur un segment

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

30 avril 2024

1 Continuité uniforme, Fonction continues par morceaux, Fonctions en escalier

Exercice 1 :
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose f' bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose $|f'(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ uniformément continue bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue.

Exercice 3 :
Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2 Propriété de l'intégrale

Exercice 4 :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f = 0.$$

On pose $m = \min_{[0,1]} f$ et $M = \max_{[0,1]} f$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq -mM.$$

Indic. : On pourra considérer $\varphi(t) = (f(t) - m)(M - f(t))$.

Exercice 5 :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a,b[$. Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)dt, \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)dt\right)$$

Indic. : Faire une disjonction de cas.

Exercice 6 :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| = \int_a^b |f(t)|dt \iff f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0$$

Exercice 7 (Théorème du point fixe) :
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\int_0^1 f = 1/2$$

Montrer que f admet un point fixe (sans utiliser les versions du théorème du point fixe déjà vues).

Exercice 8 (Formule de la moyenne) :
Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues avec $g \geq 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt$$

Indic. : Si $\int_a^b g \neq 0$, observer $\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ et utiliser le TVI.

Exercice 9 (Mines PC (*)) :
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \int_a^b t^k f(t)dt = 0$$

On va montrer que la fonction f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_a^b \widetilde{P}(t)f(t)dt = 0$.
2. Supposons que f ne s'annule pas plus de n fois sur l'intervalle $[a, b]$.
   (a) Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ (avec $p \leq n$) les points où f s'annule en changeant de signe. Étudier le signe de $x \mapsto f(x) \prod_{k=1}^p (x - x_k)$ sur l'intervalle $[a, b]$.
   (b) Calculer $\int_a^b f(t) \prod_{k=1}^p (t - x_k)dt$.
   (c) Conclure.

Exercice 10 :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$g : x \mapsto \int_a^b f(t) \sin(xt)dt$$

est Lipschitzienne.

3 Avec des primitives

Exercice 11 :
Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes

$$\begin{array}{lllllllll}
f_1 & : & t \mapsto te^{t^2} & f_2 & : & t \mapsto \frac{\ln t}{t} & f_3 & : & t \mapsto \frac{1}{t \ln t} \\
f_4 & : & t \mapsto \cos(t)\sin(t) & f_5 & : & t \mapsto \tan(t) & f_6 & : & t \mapsto \cos(t)^3 \\
f_7 & : & t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3} & f_8 & : & t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & f_9 & : & t \mapsto \frac{t}{1+t^4} \\
f_{10} & : & t \mapsto \frac{1}{1+it} & f_{11} & : & t \mapsto e^t \cos(t) & f_{12} & : & t \mapsto t\sin(t)e^t
\end{array}$$

Exercice 12 :
Calculer les intégrales

$$\begin{array}{lllllllll}
I_1 & = & \int_1^2 \frac{dt}{t^2} & I_2 & = & \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} & I_3 & = & \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
I_4 & = & \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt & I_5 & = & \int_1^2 \ln(t) dt & I_6 & = & \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \\
I_7 & = & \int_2^3 \frac{x^4+1}{x^4-1} dx & & & & & &
\end{array}$$

Exercice 13 :
Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt) dt$$

Exercice 14 :
Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $a = \mathfrak{Re}(\lambda)$, $b = \mathfrak{Im}(\lambda)$. Établir

$$t \mapsto \ln|t-\lambda| + i\arctan(\frac{t-a}{b})$$

est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$

Exercice 15 :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f possède une unique primitive F telle que

$$\int_0^1 F = 0.$$

Exercice 16 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$ tel que

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{x+T} f(t)dt = C.$$

Montrer que f est périodique.

Exercice 17 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Justifier que les fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.

$$g(x) = \int_0^x xf(t)dt \qquad h(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt \qquad k(x) = \int_0^x f(t+x)dt$$

4 IPP et changement de variables

Exercice 18 :
Calculer les intégrales suivantes par des IPP :

$$\begin{array}{lllllllll} I_1 & = & \int_0^1 \ln(1+t^2)dt & I_2 & = & \int_1^e t^n \ln(t)dt,\ n \in \mathbb{N} & I_3 & = & \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)dt \\ I_4 & = & \int_0^1 \arctan(t)dt & I_5 & = & \int_0^{1/2} \arcsin(t)dt & I_6 & = & \int_0^1 t\arctan(t)dt \\ I_7 & = & \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx & I_8 & = & \int_0^\pi t\cos(t)e^t dt & & & \end{array}$$

Exercice 19 :
Calculer les intégrales suivantes par des changements de variables :

$$\begin{array}{lllllllll} I_1 & = & \int_1^e \frac{dt}{t+t(\ln t)^2} & I_2 & = & \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)+1}} & I_3 & = & \int_0^1 \frac{dt}{e^t+1} \\ I_4 & = & \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt & I_5 & = & \int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt & I_6 & = & \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt \\ I_7 & = & \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos(t)^2}dt & I_8 & = & \int_1^2 \frac{dt}{2t+\sqrt{t}} & I_9 & = & \int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln(t)}{t^2}dt \end{array}$$

Exercice 20 :
On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21 :
Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos(t)+\sin(t)}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos(t)+\sin(t)}dt = \pi/4$$

et en déduire

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+\sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 22 :
À l'aide d'une changement de variable, montrer que

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t))dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\pi/4-t))dt$$

et en déduire

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))dt$$

Exercice 23 :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [a, b],\ f(a + b - x) = f(x)$.
Montrer que
$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

Exercice 24 :
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{t}$ étendue par continuité en 0. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt.$$

1. Justifier que f est bien définie et étudier la parité de f.
2. Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 25 :
Soit
$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch}(t)}{t} dt.$$

1. Étudier la parité de f. On l'étudie donc désormais sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Prolonger f en 0.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 26 :

1. Montrer que la fonction
$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$
est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer la limite de f en 0 à l'aide d'encadrement.

Exercice 27 (**) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \neq 0,\ F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)dt.$$

1. Montrer que F peut être prolonger par continuité en 0. On considérera F ainsi prolonger désormais.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0,\ F'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^{x} tf'(t)dt$.
3. (Bonus ***) Montrer que $F'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^{x} t(f'(t) - f'(0))dt$. En déduire que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

5 Formules de Taylor, Sommes de Riemann and co

Exercice 28 :
Déterminer les limites des suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Exercice 29 :
En utilisant des sommes de Riemann, montrer que la suite de terme général

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 30 :

1. Étudier la convergence de la suite (u_n) et (v_n) de terme général

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3}$$

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x$.
3. En déduire la nature de la suite (w_n) définie par

$$w_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sin(1/k)$$

Exercice 31 (Égalité de Taylor-Lagrange) :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors

$$\forall x \in I,\ \exists c \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Exercice 32 :
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Exercice 33 :
En utilisant une formule de Taylor, établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

Exercice 34 (*) :
Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$f(1) = f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'' = g$$

6 Avec des suites

Exercice 35 :
Soit $a < b$. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (t-b)^q dt$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Donner une relation liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$
2. Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielle.

Exercice 36 :
On pose $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$$

1. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$
3. En déduire finalement
$$e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Exercice 37 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir une relation liant I_n et I_{n+1}.
3. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_n < \frac{e}{n+1}$$
4. Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n), puis un développement asymptotique de deux termes de I_n.
5. Soit (u_n) une suite réelle définie par
$$u_0 = a \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e - (n+1)u_n$$
On suppose que $a \neq I_0$. Montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \to +\infty$

Exercice 38 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante
3. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
4. Établir
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$
5. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = 0$$
et en déduire que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o(1/n)$$