DM 8
Déterminant de matrices à triangles constants

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 14 Mai 2024

Dans tous le problème, a, b, c sont des réels et n un entier naturel supérieur ou égale à 1.

Partie I : Déterminant à triangles constants et à diagonale constante

Soit Δ_n le déterminant de la matrice carré de taille n formée de la manière suivante :

Les éléments de la diagonale principale sont égaux à a, ceux au dessus de la diagonale valent b et ceux en-dessous de la diagonale sont égaux à c.

Donc on a

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

1. Calculer Δ_1, Δ_2, Δ_3.
2. (a) Calculer Δ_n dans le cas $a = b$.
   (b) Calculer Δ_n dans le cas $a = c$.
   (c) Calculer Δ_n dans le cas $b = c$.
3. On suppose $b \neq c$ et $n \geq 3$.
   (a) Établir que $\Delta_n - (2a - b - c)\Delta_{n-1} + (a - b)(a - c)\Delta_{n-2} = 0$
   (b) Donner l'expression du terme général de la suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$.

Partie II : Déterminants à triangles constants

Désormais, on considère $a_1, \dots, a_n$ des réels. On désire calculer le déterminant D_n de la matrice carrée de taille n formée de la manière suivante :

Les coefficients diagonaux sont les $a_1, \dots, a_n$, les coefficients au dessus de la diagonale sont égaux à b et ceux en dessous sont égaux à c.

Ainsi $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}$, etc.

On suppose $b \neq c$.

On pose $d_n(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en en ajoutant x à tous les coefficients de la matrice définissant D_n. Donc

$$d_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \dots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \dots & b + x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c + x & \dots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}$$

4. Montrer que $x \mapsto d_n(x)$ est une fonction affine, ie $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = \alpha x + \beta$.
5. Calculer α, β en évaluant d_n pour des valeurs de x bien choisies
6. En déduire l'expression de D_n.

Partie III : Déterminants de puissances

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,j} = a^{ij}$. On note enfin $\delta_n = \det(A_n)$.

7. Calculer δ_1 et δ_2.
8. On suppose $n \geq 3$. Calculer δ_n lorsque $a^2 = 1$.
9. On suppose $n \geq 3$ et $a^2 \neq 1$. On suppose aussi $\delta_{n-1} \neq 0$. On pose alors

$$P_n(X) = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & X \\ a^2 & a^4 & a^6 & \cdots & a^{2(n-1)} & X^2 \\ a^3 & a^6 & a^9 & \cdots & a^{3(n-1)} & X^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{2(n-1)} & a^{3(n-1)} & \cdots & a^{(n-1)^2} & X^{n-1} \\ a^n & a^{2n} & a^{3n} & \cdots & a^{n(n-1)} & X^n \end{vmatrix}$$

   (a) Justifier que P_n est un polynôme de degré n dont on donnera le coefficient dominant.

   (b) Factoriser P_n.

   (c) En déduire une expression de δ_n en fonction de δ_{n-1} et a.

   (d) Montrer alors que

$$\forall n \geq 2, \ \delta_n = a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1)^{n-k}.$$