NOM :
Prénom :

Mardi 30 Avril 2024

Interrogation 24

Systèmes Linéaires

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'un système de Cramer.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = B$ est un système de Cramer si, et seulement si, $n = p = \mathrm{rg}(A)$ (*i.e.* si A est une matrice carré inversible).

2. Caractérisation des systèmes compatibles.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = B$ a des solutions (*i.e.* est compatibles) $\iff \mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}(A) \iff b \in \mathrm{Im}(A)$ où $b \in \mathbb{K}^n$ est canoniquement associée à B.

3. Effet des matrices d'opérations élémentaires (matrice d'opérations élémentaires et l'opération correspondante).
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. Si $i \neq j$, alors la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$ est inversible et correspond à l'opération élémentaire $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ (en multipliant à gauche). Si $\lambda \neq 0$, alors la matrice $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ est inversible et correspond à l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$. Et si $i \neq j$, alors $\mathcal{E}_{i,j} = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$ est inversible et correspond à l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.

4. La multiplication à gauche agit sur les lignes.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $E_{i,j}A$ correspond à sélectionner $C_j(A)$ et la mettre dans la i-ème colonne. Toutes les autres colonnes étant nulles. *i.e.* $C_i(E_{i,j}A) = C_j(A)$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq i$, $C_k(E_{i,j}A) = 0$.

5. Caractérisation des matrices inversibles par les systèmes.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A \underset{L}{\sim} I_n \iff \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0 \iff$ les colonnes de A sont linéairement indépendantes $\iff \forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ a une solution $\iff \forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ a une unique solution.

6. Structure de l'ensemble des solutions.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $x_0 \in \mathbb{K}^n$ une solution du système $AX = B$. Alors les solutions du système homogène $AX = 0$ est l'ev $\ker(A)$ et l'ensemble des solutions de $AX = B$ est $x_0 + \ker(A)$.

7. Nombres de solutions d'un système.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si le système $AX = B$ est incompatible, alors le système $AX = B$ n'a pas de solutions. Si le système $AX = B$ est compatible, alors soit $p = \mathrm{rg}(A)$ et dans ce cas il y a une unique solution au système, soit $\mathrm{rg}(A) < p$ et dans ce cas le système a une infinité de solutions paramétrées par $p - \mathrm{rg}(A)$ paramètres.

Exercice 2 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Discuter le nombre de solutions du système $\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ ax + y + z = a \\ x + y + z = a - 1 \end{cases}$ en fonction du paramètre a.

On résout matriciellement :

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ ax + y + z = a \\ x + y + z = a - 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1-2a & 1-a^2 \\ 0 & -1 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 1-a \\ 0 & 1-2a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 1-a \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ (a-2)(1-2a) \end{pmatrix}$$

Si $a \notin \{1, 2\}$, alors le système est de Cramer et donc il y a une unique solution. Si $a = 1$, alors la système est incompatible et donc il n'y a pas de solutions. Si $a = 2$, alors le système est compatible et de rang 2, donc il y a une infinité de solutions paramétrées par un paramètre.