Chapitre 25 - TD :
Séries

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

17 mai 2024

1 Convergence

Exercice 1 ([✓]) :
Déterminer la nature des séries de terme général (discuter la convergence selon le paramètre α si besoin) :

1) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$
2) $u_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$
3) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
4) $u_n = e - (1+1/n)^n$
5) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
6) $u_n = \frac{1}{n\cos(n)^2}$
7) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
8) $u_n = (1/n)^{1+1/n}$
9) $u_n = \frac{(3n)!}{9(n!)^3}$
10) $u_n = \frac{n!e^{2n}}{n^n}$
11) $u_n = \frac{n!}{n^{\alpha n}}$
12) $u_n = \frac{n^\alpha \ln(n)^n}{n!}$
13) $u_n = \frac{2^n}{n^2\sin(\alpha)^{2n}},\ \alpha \in]0,\pi[$
14) $u_n = \binom{n+p}{p}^{-\alpha}$
15) $u_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\frac{2}{n+\alpha^2}\right)^n$

Exercice 2 ([✓](* à *)) :**
Déterminer la nature des séries

1) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$
2) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
3) $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$
4) $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$
5) $u_n = \sin(n\pi + \pi/n)$
6) $u_n = \frac{2^n+n^2}{3^n n^2+1}$

Exercice 3 (***) :
Déterminer la nature des séries

$$u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)} \qquad w_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$$

Exercice 4 (**) :
On va étudier la nature de la série de terme générale

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}$$

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.
2. Montrer la convergence de la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$$
3. Montrer que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right)$$
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 5 :
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont également convergentes
$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n}, \quad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Exercice 6 :
Soit $\sum u_n$ une SATP convergente. Montrer que
$$\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$$
converge également.

Indic : *S'inspirer de l'exercice précédent*

Exercice 7 ([✓]) :
Soit (u_n) une suite réelle positive et
$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$$
Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Indic : *Faire une disjonction de cas.*

Exercice 8 ([✓](*)) :
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive telle que
$$\frac{xf'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

1. On suppose $\ell > -1$ ou $\ell = -1^+$.
   (a) En déduire $\exists x_0 > 1$ tel que $\forall x \geq x_0$, $\frac{f'(x)}{f(x)} \geq -\frac{1}{x}$.
   (b) Montrer alors $\exists \lambda > 0$ telle $\forall x \geq x_0$, $f(x) \geq \frac{\lambda}{x}$.
   (c) En déduire la divergence de la série $\sum f(n)$.
2. On suppose $\ell < -1$. Montrer la convergence de la série $\sum f(n)$.

   Indic : *On introduira un α bien choisi et on utilisera la comparaison série intégrale.*

Exercice 9 ([✓]) :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ. Quelle est la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$?

Exercice 10 ([✓]) :
Soit (u_n) la série définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Existence et éventuellement calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1-u_n)$$

2. Nature de $\sum u_n$?

Exercice 11 ([✓]*) :
Pour $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Déterminer la limite de $(s-1)\zeta(s)$ quand $s \to 1^+$.
Indic : *Comparaison série/intégrale*

Exercice 12 ([✓]*) :
Si $a > 0$, justifier de la convergence de la série $\sum \frac{a}{n^2+a^2}$. Puis, par une comparaison entre séries et intégrales, déterminer

$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$

Exercice 13 (X PC (extrait)) :
Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2
2. Soit a et b les éléments de E déterminés par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

   Montrer que ces deux suites divergent vers $+\infty$
3. Calculer

$$w_n = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$$

4. On pose $c_n = a_n/b_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que la série $\sum(c_{n+1} - c_n)$ est absolument convergente et en déduire l'existence $\ell \in \mathbb{R}$ telle $c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Exercice 14 ([✓]) :
Soit $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En utilisant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ est une série convergente.
3. En utilisant $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrer que $\sum u_n^2$ diverge.

Exercice 15 :
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.
Indic : *Comparaison série/intégrale*

Exercice 16 (Produit de Cauchy) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k.$$

1. On suppose $\sum u_n$ absolument convergente. Montrer que $\sum v_n$ est convergente et calculer sa somme en fonction de la somme de $\sum u_n$.
2. On suppose (u_n) converge vers 0. Déterminer la nature de (v_n).
3. On suppose que $\sum u_n$ est convergente. Montrer que $\sum v_n$ est convergente et déterminer sa somme en fonction de la somme de $\sum u_n$.

2 Calcul de somme

Exercice 17 ([✓]) :
Après en avoir justifier l'existence, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

Exercice 18 :
Nature et somme de

$$\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 19 :
Existence et calcul de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 20 :
Montrer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln(2).$$

Exercice 21 :
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge.
Calculer alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$$

Remarque :
On est en train de flirter avec des séries de fonctions et même avec des séries entières dont on vous parlera l'année prochaine. Vous démontrerez alors proprement que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 22 (CCP PSI) :
Convergence et somme de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$
Convergence et somme de
$$\sum_{n\geq 2} \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$$

Exercice 23 ([✓]) :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de a et b, la nature de la série
$$\sum_{n\geq 1} \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$
et calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 24 :
Soit $0 < a < b$ et (u_n) une suite strictement positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

1. En étudiant la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$, montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n = n^\alpha u_n$. De façon similaire, montrer
$$\exists A > 0, \ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^{b-a}}.$$
3. On suppose $b - a > 1$. Montrer que
$$(b-a-1)u_n = (1-b)(u_{n+1} - u_n) - ((n+1)u_{n+1} - nu_n)$$
et en déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 25 :
On rappelle l'existence de la constante d'Euler γ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

1. Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ quand $n \to +\infty$.
2. Comparer alors $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ quand $n \to +\infty$.
3. En déduire la convergence et somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 26 (Produit de Cauchy) :
Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Montrer que

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n.$$

Exercice 27 :
On considère la suite définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

1. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de $x_{n+1}^2 - x_n^2$.
3. En déduire un équivalent de x_n.

3 Familles sommables

Exercice 28 :
Déterminer la nature (sommable ou non) des familles suivantes :

1. $\left(\frac{1}{n!m!(n+m+1)}\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\frac{1}{(n+m)^3}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$
3. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}^*}$
4. $\left(\frac{1}{n^2+m^2}\right)_{n,m\in\mathbb{N}^*}$
5. $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$

Exercice 29 :

1. Montrer que la famille $(\frac{1}{p^q})_{p,q\geq 2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{\substack{p\geq 1\\ q\geq 2}}$ n'est pas sommable.
3. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{\substack{p\geq 2\\ q\geq 1}}$ n'est pas sommable.

Exercice 30 :
Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Justifier l'existence et calculer $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$.

Exercice 31 :
On rappelle $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
2. En déduire la sommabilité de la famille $\left(\frac{(-1)^{pq}}{p^2q^2}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 32 :
Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Calculer
$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k) - 1).$$
2. Calculer
$$S' = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (\zeta(k) - 1).$$

Exercice 33 :
Soit $a, b \in \mathbb{C}$.
Trouver une CNS sur a, b pour que la famille $\left(\frac{a^p b^q}{q!}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$ soit sommable. Quand c'est possible, calculer la somme.

Exercice 34 :
Soit $\alpha, \beta > 1$. Montrer
$$\sum_{p,q\geq 2} \frac{1}{p^\alpha q^\beta - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\zeta(n\alpha) - 1)(\zeta(n\beta) - 1).$$

Exercice 35 (***) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$ converge.
   (a) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_k$ converge et que sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{na_n^2}$ converge où a_n est le nombre de chiffres qu'il faut pour écrire n en base 10.
   Indic : *On pourra utiliser* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$
2. On suppose $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k\right)^{1/2}$ converge.