NOM :
Prénom :

Mardi 21 Mai 2024

Interrogation 26

Intégration 1

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Théorème fondamental de l'intégration.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I, de dérivée f et s'annule en a.
2. Continuité uniforme.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x, y \in I$, $|x - y| \leq \eta$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
3. Inégalité triangulaire intégrale.
Soit $a < b$, $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. Alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.
4. Intégration par parties.
Soit $u, v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Alors $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.
5. Théorème de Heine.
Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment, *i.e.* si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$
6. Définition de la valeur moyenne.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. La valeur moyenne de f est $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$.
7. Intégrale nulle d'une fonction continue.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $\exists c \in]a, b[$, $f(c) = 0$.
8. Approximation uniforme des fonctions cpm par des fonctions en escaliers.
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$.

Exercice 2 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Justifier que $M = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$ existe. Montrer que si $\int_0^1 f(x)dx = M$, alors f est constante.

Par théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes. Donc $\max_{x\in[0,1]} f(x)$ et donc $M = \sup_{x\in[0,1]} f(x) = \max_{x\in[0,1]} f(x)$ existe.

Supposons $\int_0^1 f(x)dx = M$. On pose $g = M - f$. Alors g est continue sur $[0, 1]$ et $g \geq 0$. De plus, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 g(x)dx = M - \int_0^1 f(x)dx = 0$. Donc $g = 0$. Et donc $f = M$.