# DS 10
# Représentation Matricielle - Déterminant
## Théorème de Cayley-Hamilton en dimension 3

Simon Dauguet
*simon.dauguet@gmail.com*

Mercredi 22 Mai 2024

*Le devoir dure 4h.*

*La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.*

*Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.*

*La calculatrice n'est pas autorisée.*

*Le sujet comporte 3 pages.*

On se propose, dans ce problème, de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton, en dimension 3 seulement. Il s'agit de montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice est un polynôme annulateur de la matrice, où le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est le polynôme

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - X & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - X & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - X \end{vmatrix}.$$

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux et on pose

$$\mu(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}.$$

On rappelle que deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ sont dites semblables, si $\exists P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

### Partie 1 : Étude préliminaire et cas particulier

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
3. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ sont semblables, alors elles ont même déterminant et même trace.

4. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe un polynôme non nul $P$ de degré inférieur ou égal à $n^2$ tel que $\widetilde{P}(A) = 0$.

   On vient donc de montrer qu'il existe toujours un polynôme annulateur (non trivial) de n'importe quelle matrice. Le théorème de Cayley-Hamilton donne un moyen pour trouver un tel polynôme annulateur et permet en plus, d'en avoir un de degré exactement $n$.

5. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Calculer le polynôme caractéristique $P_A$ de $A$ sous forme factorisé.

6. Vérifier que $\widetilde{P_A}(A) = 0$.

**Partie 2 : Polynôme caractéristique**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

7. Montrer que $P_A$ est un polynôme de degré 3. Exprimer ses coefficients à l'aide de $\operatorname{tr}(A)$, $\det(A)$ et $\mu(A)$. On vérifiera en particulier que le coefficient constant de $P_A$ est $\det(A)$.

   $P_A$ s'appelle le polynôme caractéristique de $A$.

8. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que si $A$ et $B$ sont semblables, alors $P_A = P_B$.

9. En considérant la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3$, montrer que la réciproque est fausse.

10. À l'aide de la question 8, prouver que si $A$ et $B$ sont semblables, alors elles ont même déterminant, même trace et $\mu(A) = \mu(B)$.

11. Montrer que $A$ est inversible si, et seulement si, $0$ n'est pas racine de $P_A$.

12. On appelle $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à $A$. Soit $\lambda$ une racine de $P_A$. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^3$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

13. On suppose que $P_A$ possède trois racines distinctes $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ et, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on appelle $x_i$ un vecteur non nul tel que $u(x_i) = \lambda_i x_i$. Montrer que la famille $(x_1, x_2, x_3)$ est libre et en déduire que $A$ est semblable à une matrice diagonale.

**Partie 3 : Théorème de Cayley-Hamilton**

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On appelle $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à $A$.

L'objectif de cette partie est de montrer que $\widetilde{P_A}(A) = 0_3$, autrement dit, que $\widetilde{P_A}(u) = 0$, soit $\forall x \in \mathbb{C}^3$, $\widetilde{P_A}(u)(x) = 0$. Cette propriété s'appelle le théorème de Cayley-Hamilton, en dimension 3 (ce théorème est vrai en dimension $n$ quelconque).

Soit $x \in \mathbb{C}^3$ tel que $x \neq 0$.

14. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, la famille $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^n(x))$ est liée.

15. On appelle $p$ le plus grand entier naturel tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^p(x))$ est libre.

    Justifier que $p$ existe et que $p \leq 2$.

16. Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^{p+1}$ tel que
$$u^{p+1}(x) + \alpha_p u^p(x) + \cdots + \alpha_1 u(x) + \alpha_0 x = 0.$$

17. Dans cette question, on suppose $p = 2$. On a donc
$$u^3(x) + \alpha_2 u^2(x) + \alpha_1 u(x) + \alpha_0 x = 0.$$

(a) Justifier que $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et donner, à l'aide de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, la matrice $B$ de $u$ dans cette base.

(b) Calculer $P_B$, le polynôme caractéristique de $B$.

(c) À l'aide de la partie 2, montrer que $P_B = P_A$.

(d) En déduire que $\widetilde{P_A}(u)(x) = 0$.

18. Dans cette question, on suppose $p = 1$.

(a) Justifier qu'il existe un vecteur $e \in \mathbb{C}^3$ tel que $(x, u(x), e)$ soit une base de $\mathbb{C}^3$.

(b) Montrer que la matrice de $u$ dans cette base est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 & a \\ 1 & -\alpha_1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

(c) Montrer que $\widetilde{P_B}(u) = v \circ (u^2 + \alpha_1 u + \alpha_0 \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^3})$ avec $v = c \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^3} - u$.

(d) En vous inspirant de la question précédente, en déduire que $\widetilde{P_A}(u)(x) = 0$.

19. Dans cette question, on suppose que $p = 0$ (on a donc $u(x) + \alpha_0 x = 0$) et on complète la famille $(x)$ en une base $(x, e_1, e_2)$ de $\mathbb{C}^3$.

(a) Donner la forme de la matrice $B$ de $u$ dans dans la base $(x, e_1, e_2)$.

(b) Montrer que $\widetilde{P_B}(u) = v \circ (u + \alpha_0 \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^3})$ avec $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, puis que $\widetilde{P_A}(u)(x) = 0$.

20. Conclure.

**Partie 4 : Une application aux suites linéaires récurrentes triples**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

21. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
22. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
23. Calculer $P_A$, le polynôme caractéristique de $A$.
24. À l'aide de la question précédente et de la partie 3, donner $A^3$ en fonction de $A^2$, $A$ et $I_3$.
25. On pose $B = A - I_3$. À l'aide de la question précédente, montrer que $B^3 = B^2$.
26. En déduire $B^k$ pour tout entier $k \geq 2$.
27. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1 - n$, puis calculer $A^n$ en fonction de $A^2$, $A$ et $I_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
28. Exprimer alors $u_n$ en fonction de $n$.