



Chapitre 26 - TD

Espaces Préhilbertiens Réels

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

28 mai 2024

1 Produit scalaires et orthogonalité

Exercice 1 :

Montrer que les exemples suivants sont des produits scalaires :

1. $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n \tilde{P}(k)\tilde{Q}(k)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. $\varphi(P, Q) = \int_0^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt$ sur $\mathbb{R}[X]$
3. $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$
4. $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1 - t^2)dt$ sur $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$

Exercice 2 (*) :

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On pose

$$\varphi((x, y), (x', y')) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'$$

A quelles conditions sur a, b, c, d , φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 :

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Montrer

$$\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$$

Exercice 4 :

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre dans E l'équation

$$\langle x | a \rangle = \lambda$$

d'inconnue $x \in E$.

Exercice 5 :

Soit E préhilbertien réel, $f, g : E \rightarrow E$ telles que

$$\forall x, y \in E, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | g(y) \rangle$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 6 ([✓]) :

Soit E euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \rightarrow E$ une isométrie nulle en 0, i.e.

$$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1. Montrer que f conserve le produit scalaire, i.e. $\forall x, y \in E, \langle f(x)|f(y) \rangle = \langle x|y \rangle$.
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 7 :

Soit E préhilbertien réel et $x, y \in E$. Montrer que

$$x \perp y \iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 8 :

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité, c'est-à-dire telle que

$$\forall x, y \in E, \langle x|y \rangle = 0 \implies \langle f(x)|f(y) \rangle = 0$$

Montrer que $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

Exercice 9 (Centrale MP ()) :**

Soit E euclidien non trivial et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{tr}(u) = 0$.

1. Montrer $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x)|x \rangle = 0$.
2. Montrer qu'il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 10 (Famille équiangulaire) :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \implies \langle u_i|u_j \rangle = c$.

Déterminer les valeurs de c pour lesquelles la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E .

Exercice 11 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) :

Effectuer le procédé de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$ munit de son produit scalaire canonique sur $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (-1, 1, 0)$
2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt$ sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ munit de son produit scalaire canonique $\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$, orthonormaliser la famille (A_1, A_2, A_3) avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 12 (Matrices orthogonales) :

On note

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I_n\}.$$

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A {}^tA = I_n$.
2. Montrer que $\det(A) = \pm 1$.
3. Montrer que ${}^tA \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que les colonnes de A forment une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

2 Partie orthogonales

Exercice 13 :

Soit E euclidien et F, G deux sev de E .

Exprimer $(F \cup G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$.

Exercice 14 (Formes linéaires [✓]) :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

1. Justifier que E et E^* sont isomorphes.
2. Soit $f \in E^*$ non nulle. Montrer que $\exists! a \in E \setminus \{0\}, \forall x \in E, f(x) = \langle x|a \rangle$.
3. En déduire également que deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.
4. On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X] : \langle P|Q \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{P^{(n)}}(0) \widetilde{Q^{(n)}}(0)$.
 - (a) Montrer que c'est bien un produit scalaire.
 - (b) Déterminer $A \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \tilde{P}(1) = \langle A|P \rangle$.
 - (c) Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \tilde{P}(1) = \langle A|P \rangle$? Pourquoi ?

Exercice 15 :

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x, y \in E, \langle f(x)|y \rangle = \langle x|f(y) \rangle$$

1. Montrer que la matrice de f est symétrique dans tout BON.
2. Montrer que $\ker(f) \perp \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 16 :

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E, \langle f(x)|x \rangle = 0$.

Que peut-on dire de $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$?

Exercice 17 :

Soit E euclidien et $f : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \langle f(x)|f(y) \rangle = \langle x|y \rangle.$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 18 :

Soit E préhilbertien réel et F sev de E . Montrer

$$F^\perp = ((F^\perp)^\perp)^\perp.$$

Exercice 19 :

On note $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ qu'on munit de son produit scalaire canonique. On introduit également

$$F = \{f \in E, \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{g \in E, \forall t \in [0, 1], g(t) = 0\}$$

1. Montrer que $F^\perp = G$
2. Les sev F et $F^\perp$ sont-ils supplémentaires dans E ?
3. Comparer $F^\perp + G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp$

3 Distance, Projection orthogonale

Exercice 20 :

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que

$$\langle P|Q \rangle = \tilde{P}(0)\tilde{Q}(0) + \tilde{P}(1)\tilde{Q}(1) + \tilde{P}(2)\tilde{Q}(2)$$

définit un produit scalaire, puis calculer $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.

Exercice 21 :

Donner les matrices des applications orthogonales suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, la projection sur $P : x - 2y + z = 0$.
2. Dans un ev euclidien E de BON $\mathcal{B} = (i, j, k)$, la projection sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Dans un ev euclidien E de BON $\mathcal{B} = (i, j, k)$, la symétrie par rapport au plan P d'équation $x = z$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 22 :

On se place dans $\mathbb{R}^4$ punit de sa structure euclidienne usuelle. On considère le sev de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$$

1. Déterminer une BON du supplémentaire orthogonal de F
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$
3. Donner la matrice, relativement à la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à F .
4. Calculer $d(u, F)$ pour $u = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice 23 :

Soit E euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une BON de E et $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on déterminera une équation relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 24 :

Soit E euclidien et $x, y \in E$ non nuls.

À quelles conditions sur x et y , le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}(y)$ est-il égal au projeté orthogonal de y sur $\text{Vect}(x)$?

Exercice 25 :

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall f, g \in E, \varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2. On note $\mathcal{P}$ les fonctions paires et $\mathcal{I}$ les fonctions impaires. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$.

3. Soit $\psi : f \mapsto \hat{f}$ où $\hat{f} : x \mapsto f(-x)$. Montrer que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 26 :

Calculer les quantités suivantes :

1. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée que de 1 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \|M - aI_n - bJ\|$.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$$

3. Calculer

$$\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt.$$

Exercice 27 :

Soit E euclidien et F et G deux sev de E .

Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux ssi, $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = d(x, F)^2 + d(x, G)^2$.

Exercice 28 (Déterminant de Gram) :

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $x_1, \dots, x_n \in E$. On note $G(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les $\langle x_i | x_j \rangle$. On l'appelle matrice de Gram associée à la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

1. Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $\det(G(x_1, \dots, x_n)) = 0$.

On suppose désormais que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ (par procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, par exemple). On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Déterminer un lien entre $G(x_1, \dots, x_n)$, A et ${}^t A$ et en déduire

$$\det(G(x_1, \dots, x_n)) > 0.$$

3. Soit $u \in E$. Montrer

$$d(u, F) = \sqrt{\frac{\det(G(u, x_1, \dots, x_n))}{\det(G(x_1, \dots, x_n))}}$$

Exercice 29 (Inégalité d'Hadamard) :

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Montrer que $\forall x_1, \dots, x_n \in E$,

$$|[x_1, \dots, x_n]| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|$$

2. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

4 Cauchy-Schwarz**Exercice 30 :**

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 31 :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

Montrer que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, I_{n+p}^2 \leq I_n I_p$$

Exercice 32 :

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$\ell(f) = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right)$$

Montrer que $\ell(f) \geq (b-a)^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 33 :

On considère le produit scalaire canonique $\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(AB + BA)^2 \leq 4 \text{tr}(A^2) \text{tr}(B^2).$$

Exercice 34 :

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire $\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une BON.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}({}^tAA)}$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 35 (Matrices orthogonales) :

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire ${}^tAA = A{}^tA = I_n$. Montrer

$$A \in \mathcal{M}_n([-1, 1]), \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n, \left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n\sqrt{n}, n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$$

Exercice 36 (X PC) :

Soit $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite des moyenne de Casaro :

$$\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

On suppose $\sum u_n^2$ converge.

1. Montrer que $\forall n \geq 2, (n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 \leq 2u_n v_n$.
2. Montrer que $\sum v_n^2$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

3. En déduire la sommabilité de la famille $\left(\frac{u_n u_m}{n+m} \right)_{n,m \geq 1}$.