NOM :
Prénom :

Mardi 28 Mai 2024

Interrogation 27

Intégration 2

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Taylor avec reste intégral.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Alors $\forall a, x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

2. Caractérisation des primitives complexes.
Soit $f, F : I \to \mathbb{C}$. Alors F est une primitive de f sur I, ssi $\mathfrak{Re}(F)$ et $\mathfrak{Im}(F)$ sont des primitives de $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sur I respectivement (*i.e.* ssi $\mathfrak{Re}(F)' = \mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(F)' = \mathfrak{Im}(f)$).

3. Sommes de Riemann à gauche et à droite.
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les sommes de Riemann à gauche et à droite de f sur $[a,b]$, notées respectivement $R_n^-(f)$ et $R_n^+(f)$, par

$$R_n^-(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}),\ R_n^+(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}).$$

4. Inégalité de Taylor-Lagrange.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$ telle que $f^{(n+1)}$ est bornée sur I. Alors $\forall a, x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

où $M = \sup_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$.

5. Convergence des sommes de Riemann.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)dt.$$

De même pour les sommes de Riemann de f à droite.

6. Changements de variable.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{C}^1(J, I)$. Alors $\forall a, b \in J$,

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx.$$

Exercice 2 :
Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ puis étudier $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{1/n}$.

On commence par calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \overbrace{1}^{\downarrow} \times \underbrace{\ln(1+x^2)}_{\downarrow} dx$$

$t \mapsto t \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ de dérivée $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \ln(1+t^2) \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de dérivée $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$. Donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= [t\ln(1+t^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt \\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt \\ &= \ln(2) - 2[t - \arctan(t)]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2(1-\pi/4) \\ &= \ln(2) - 2 + \pi/2. \end{aligned}$$

On pose $\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2)^{1/n}$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(u_n) &= -2\ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(n^2 + k^2) \\
&= -2\ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\ln(1 + (k/n)^2) + 2\ln(n)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + (k/n)^2).
\end{aligned}$$

On pose $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$. Alors $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n)$. Et donc, par convergence des sommes de Riemann (à droite),

$$\ln(u_n) \xrightarrow{\int}{}_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \ln(1 + x^2)dx = \ln(2) - 2 + \pi/2.$$

Donc, par continuité de l'exponentielle,

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{2} e^{\pi/2 - 2}.$$