NOM :
Prénom :

Mardi 04 Juin 2024

Interrogation 28

Séries

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. TSSA.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suie alternée. Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.

2. Critère de D'Alembert.
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+$. Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument ; si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement ; si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

3. Caractérisation de la convergence d'une suite par les séries télescopiques.
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge si, et seulement si, $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

4. Convergence des séries de Riemann (et valeur de $\zeta(2)$).
La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. Et de plus, $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Définition de la convergence absolue.
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

6. Définition du produit de Cauchy.
Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite $(w_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ produit de Cauchy de (u_n) et (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

7. Théorème de comparaison à une SATP (un seul cas).
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et (v_n) une SATP telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty}$. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

8. Caractérisation de sommabilités des séries doubles.
Soit $(a_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$. La famille $(a_{p,q})_{p,q} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{q\in\mathbb{N}} |a_{p,q}|$ converge et $\sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{q=0}^{+\infty} |a_{p,q}|$ converge. Et dans ce cas,

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}.$$

Exercice 2 :
On pose $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(\alpha) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{k}{\alpha}-1)}{n!}$. Étudier, en fonction du paramètre α, la nature de $\sum v_n(\alpha)$.

On note que $\forall \alpha \notin \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(\alpha) \neq 0$. Et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$, $\forall n > \alpha$, $v_n(\alpha) = 0$.
Donc $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$, $\sum v_n(\alpha)$ est convergente.
Soit $\alpha \notin \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{v_{n+1}(\alpha)}{v_n(\alpha)}\right| &= \left|\frac{\prod_{k=0}^{n}(k/\alpha - 1)n!}{(n+1)!\prod_{k=0}^{n-1}(k/\alpha-1)}\right| \\ &= \left|\frac{\alpha/n - 1}{n+1}\right| \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{|\alpha|}.\end{aligned}$$

Alors, si $|\alpha| < 1$, alors $\sum v_n(\alpha)$ diverge grossièrement et si $|\alpha| > 1$, $\sum v_n(\alpha)$ converge absolument, par le critère de D'Alembert.

On a déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n(1) = 0$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n(-1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(-k-1)}{n!} = (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Donc $\sum v_n(-1)$ diverge grossièrement.

Finalement, $\sum v_n(\alpha)$ converge ssi $\alpha \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.