DS 11
Intégration - Séries

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 5 Juin 2024

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

Problème 1 (Études de séries annexes (Extrait CCINP 2006 PSI)) :
Dans les parties I et II, les notations utilisées sont les suivantes :

A toute suite de complexe a, on associe la suite a^* définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$.

PARTIE I : Deux exemples

1. **Cas d'une suite géométrique**

   Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que la suite a est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

   (a) Exprimer a_n^* en fonction de z et n

   (b) On suppose que $|z| < 1$.

      i. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et expliciter $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

      ii. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

   (c) On suppose que $|z| \geq 1$

      i. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$?

      ii. Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$? est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

2. **Un exemple avancé**

   On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{\ln(k+2)}$.

   (a) Montrer que $\forall i, k, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq i \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$.

   (c) Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

   (d) Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$.

PARTIE II : Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que la suite a est à valeurs réelles, la suite a^* étant toujours définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

3. **Comparaison des convergences des deux suites.**

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé et $n \in \mathbb{N}$ avec $n > k$.

      i. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$

      ii. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$

   (b) Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé. On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

   (c) On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

   (d) On suppose que a_n tend vers ℓ (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

   (e) La convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. **Comparaison des convergences des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n^*$.**

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

   (a) Pour $n \in [\![0, 3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

   (b) On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des S_k pour $k \in [\![0, n]\!]$:

   $$U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \text{ pour } n \in \mathbb{N} \qquad (\mathcal{E})$$

      i. A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte tenu des résultats obtenus à la question 4a ?

      ii. Établir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n

   (c) On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

   (d) La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$?

Problème 2 (Étude d'une fonction intégrale (Extrait Concours Commun Maroc 2008 TSI)) :
Les différentes parties du problème sont indépendantes.

Partie 1 : Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt. \tag{E}$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle et on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

1. Justifier que $f(0) = 0$.
2. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t)dt$.
   (b) Montrer alors que f est dérivable et calculer sa dérivée.
   (c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \qquad \text{et} \qquad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

4. On pose $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$. En dérivant la première des égalités de la question précédente par rapport à x et la seconde par rapport à y, déduire que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0. \tag{$\mathcal{E}_\lambda$}$$

Partie 2 : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

5. Justifier que si $x > 0$ et différent de 1, alors x et x^2 sont d'un même côté de 1 sur la droite réelle.
6. En déduire que le domaine de définition de la fonction f, noté D_f, est égal à $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
7. Justifier que la fonction f est dérivable en tout point de son domaine de définition et exprimer sa dérivée en tout point de D_f.
8. **Étude de f au voisinage de 1**
   (a) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\ln$ au voisinage de 1.
   (b) Justifier alors que $\frac{1}{\ln(x)} \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o(1)$.
   (c) En déduire que les fonctions f' et $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.
   (d) En déduire qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\},\ \left|\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\right| \leq \frac{3}{2}.$$

   (e) Calculer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$ pour tout $x \in D_f$.
   (f) Déduire des deux questions précédentes, que

$$\forall x \in]\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{1+\alpha}[\setminus\{1\},\ |f(x) - \ln(1+x)| \leq \frac{3|x^2-x|}{2}$$

   puis trouver la limite de f en 1.
   (g) On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f la fonction ainsi obtenue. Montrer que cette fonction est dérivable en 1 et préciser sa dérivée.

9. **Étude de f au voisinage de 0**
   (a) Justifier de la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ sur D_f, et en déduire que, pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leq f(x) \leq -\frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.
   (b) On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0. Quelle est la valeur de $f'(0)$?
10. Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$.
11. Montrer que la dérivée de f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
12. **Calcul d'une intégrale**
   (a) Expliquer soigneusement comment donner un sens à l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln(t)} dt$.
   (b) Montrer que pour tout couple (x,y) d'éléments de $]0,1[$,

$$\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} = \int_y^x \frac{u}{\ln(u)} du$$

   et en déduire que $f(x) - f(y) = \int_x^y \frac{1-t}{\ln(t)} dt$.
   (c) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln(t)} dt$.