DS 11
Intégration - Séries
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 05 Juin 2024

Problème 1 (Séries annexes) :

Partie I : Deux exemples

1. **Cas d'une suite géométrique**

Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

(a) On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^n = \left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

par Newton.

(b) On suppose $|z| < 1$.

i. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est alors une série géométrique de raison $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, donc c'est une série convergente (et même absolument convergente) de somme $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

ii. D'après la question 1a, la série $\sum a_n^*$ est une série géométrique de raison $\frac{z+1}{2} \in \mathbb{C}$. Or $\left|\frac{z+1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}(|z|+1) < 1$ par inégalité triangulaire. Donc la série $\sum a_n^*$ est une série (absolument) convergente, de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z).$$

(c) On suppose $|z| \geq 1$.

i. La série $\sum a_n$ est un série géométrique de raison $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq 1$, donc la série $\sum a_n$ est une série grossièrement divergente ($a_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$).

ii. On suppose $z = -2$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^n = \frac{1}{2^n}(1-2)^n = (-1/2)^n.$$

Donc la série $\sum a_n^*$ est la série géométrique $\sum(-1/2)^n$ de raison $-1/2 \in]-1,1[$, donc la série $\sum a_n^*$ est (absolument) convergente et de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1-(-1/2)} = 2/3$.

2. **Un exemple avancé**

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{\ln(k+2)}$.

(a) Soit $i, n, k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq i \leq k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{(n-k)!i!(k-i)!} = \frac{(n-i)!}{(n-i-k+i)!(k-i)!}\frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}.$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k && \text{def } a_n^* \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}\frac{(-1)^k 2^i}{\ln(i+2)} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{0\le i\le k\le n}\binom{n}{k}\binom{k}{i}\frac{(-1)^k 2^i}{\ln(i+2)} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}\frac{(-1)^k 2^i}{\ln(i+2)} && \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}\frac{2^i}{\ln(i+2)}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{k-i}(-1)^k\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}\frac{2^i}{\ln(i+2)}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}(-1)^{i+j}\right) && j = k-i \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{(-1)^i 2^i}{\ln(i+2)}(1-1)^{n-i} && \text{Newton} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{(-1)^n 2^n}{\ln(n+2)} \\
&= \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}.
\end{aligned}$$

(c) On notera que la série $\sum a_n$ est une série alternée. Cependant,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{\ln(k+2)} \ge \frac{2}{\ln(2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \frac{3^n}{\ln(n+2)}.$$

Donc, par croissance comparée, $|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc (a_n) ne converge par vers 0. Donc $\sum a_n$ diverge grossièrement.

(d) La série $\sum a_n^*$ est une série alternée. De plus, $\ln$ étant croissant, la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{\ln(n+2)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Donc, par le TSSA, $\sum a_n^*$ est convergente.

Partie II : Étude du procédé de sommation

On supposera $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. **Comparaison des convergences des deux suites.**

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \ge k+1$.

i. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\prod_{j=n-k+1}^{n} j = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(n-k+j).$$

Or $\forall j \in \{1,\dots,k\}$, $n-k+j \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ car k et j sont fixés. Donc par produit (fini et dont le nombre facteur est fixé et indépendant de n), $\prod_{j=1}^{k}(n-k+j) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$. D'où finalement,

$$\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

ii. On a donc

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!2^n}.$$

Mais par croissance comparée, $n^k \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$. Donc $\frac{n^k}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car k est fixé.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $q \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq q+1$, on pose $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$.

D'après la question précédente, on sait que $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Donc en particulier, $\forall k \in \{1,\dots,q\}$, $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Mais en $k=0$, on a $\binom{n}{0} = 1$ et $2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc finalement, $\forall k \in \{0,\dots,q\}$, $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'autre part, pour tout $k \in \{0,\dots,q\}$, a_k est un réel fixé, indépendant de n. Donc $\forall k \in \{0,\dots,q\}$, $\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par linéarité de la limite.

Finalement, par linéarité de la limite et comme $S_q(n,a)$ est une somme finie avec un nombre de termes indépendant de n, on a

$$S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(c) On suppose $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq q+1$, $|a_n| \leq \varepsilon$. Alors, par sommation,

$$\begin{aligned}
\forall n \geq q+1,\ \left|\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}\right| &\leq \sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{|a_k|}{2^n} && \text{Inégalité triangulaire}\\
&\leq \varepsilon \sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} && \text{car } \sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \geq 0\\
&= \varepsilon && \text{Newton}
\end{aligned}$$

Donc, par définition de la limite, $\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

De plus, on a vu à la question précédente que $\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc finalement, par linéarité de la limite,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} = \sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} + \sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(d) On suppose $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Alors $a_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* - \ell &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} - \frac{2^n\ell}{2^n}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\ell}{2^n} && \text{Newton}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(a_k-\ell}{2^n}.
\end{aligned}$$

Donc, d'après la question précédente, $a_n^* - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $a_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

(e) Dans la question précédente, on a montre a converge $\Longrightarrow$ a^* converge. On va donc étudier maintenant la réciproque de cette proposition.

Mais la réciproque est fausse. En effet, si on prend $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n$, alors a ne converge pas mais on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2^n} = \frac{(1-1)^n}{2^n} = 0.$$

Donc la suite a ne converge pas mais la suite a^* converge vers 0. Donc a^* converge $\not\Longrightarrow$ a converge. Et donc finalement, on a l'implication a converge $\Longrightarrow$ a^* converge.

4. **Comparaison des convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$ et $U_n = 2^n T_n$.

(a) On a :

$$U_0 = 2^0 T_0 = T_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k^* = a_0^* = a_0 = S_0$$

$$U_1 = 2T_1 = 2(a_0^* + a_1^*) = 2(a_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_1)) = 2S_0 + S_1.$$

$$U_2 = 4(a_0^* + a_1^* + a_2^*) = 4(a_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_1) + \frac{1}{4}(a_0 + 2a_1 + a_2)) = 4S_0 + 2S_1 + S_2 + a_1 = 3S_0 + 3S_1 + S_2$$

et

$$\begin{aligned}
U_3 &= 8T_3 \\
&= 8(a_0^* + a_1^* + a_2^* + a_3^*) \\
&= 8(a_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_1) + \frac{1}{4}(a_0 + 2a_1 + a_2) + \frac{1}{8}(a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3)) \\
&= 8S_0 + 4S_1 + 2S_2 + 2a_1 + S_3 + 2(a_1 + a_2) \\
&= 6S_0 + 6S_1 + 2S_2 + S_3 + 2(S_2 - S_0) \\
&= 4S_0 + 6S_1 + 4S_2 + S_3.
\end{aligned}$$

(b) i. Compte tenu de la question précédente, on peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\lambda_{n,k} = \binom{n+1}{k+1}$.

ii. D'après la question précédente, on a pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k$. Alors

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= 2^{n+1} T_{n+1} \\
&= 2^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} a_k^* \\
&= 2^{n+1} (T_n + a_{n+1}^*) \\
&= 2U_n + 2^{n+1} a_{n+1}^* \\
&= 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k + \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k \\
&= 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (S_k - S_{k-1}) && \text{avec } S_{-1} = 0 \\
&= 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \right) S_k + S_{n+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+1} S_k + S_{n+1} && \text{Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k+1} S_k
\end{aligned}
$$

Donc, par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k-1}.$$

avec la convention $S_{-1} = 0$.

(c) On suppose $\sum a_n$ converge et note S sa somme. Donc $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. On a donc, par définition, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S'_n = S_{n-1}$ avec la convention $S'_0 = S_{-1} = 0$. Alors (S'_n) converge vers S. Donc, d'après la question 3d, la suite (S'^*_n) converge vers S. Or

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S'^*_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S'_k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{k-1} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{k-1} = \frac{U_{n-1}}{2^n} = \frac{T_{n-1}}{2}.$$

On a donc $T_{n-1}/2 = S'^*_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$. Donc $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2S$ par linéarité de la limite. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a^*_k$. Donc par définition, la série $\sum a^*_n$ converge de somme $2S$, *i.e.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^*_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

(d) On vient de montre "$\sum a_n$ converge $\implies$ $\sum a^*_n$ converge". Mais la réciproque est fausse. En effet, en prenant $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement, mais

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a^*_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \frac{(1-1)^n}{2^n}$$

par Newton.

Donc la suite (a^*_n) est une suite stationnaire en 0 à partir du rang 1. Donc la série $\sum a^*_n$ converge de somme 1 ($a^*_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a^*_n = 0$).

Donc il n'y a pas équivalence entre les deux convergences des deux séries. Seule une implication est vraie en général.

Problème 2 (Fonction intégrale) :

Partie 1 : Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt. \tag{E}$$

On suppose $f \neq 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$.

1. On a donc en particulier

$$f(0)^2 = \int_0^0 f(t)dt = 0.$$

Donc $f(0) = 0$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'équation fonctionnelle que vérifie f, on a

$$f(x)f(a) = \int_{x-a}^{x+a} f(t)dt.$$

Comme $f(a) \neq 0$ par hypothèse, on en déduit

$$f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t)dt.$$

(b) On sait que f est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, les applications $x \mapsto x - a$ et $x \mapsto x + a$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Or, par théorème fondamental de l'intégration, $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f. Or $x \mapsto x + a$ et $x \mapsto x - a$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition, $x \mapsto \int_0^{x+a} f(t)dt$ et $x \mapsto \int_0^{x-a} f(t)dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto f(x+a)$ et $x \mapsto f(x-a)$ respectivement. D'où, par structure d'ev, $x \mapsto \int_0^{x+a} f(t)dt - \int_0^{x-a} f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto f(x + a) - f(x - a)$. Donc, par Chasles, $x \mapsto \int_{x-a}^{x+a} f(t)dt \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dérivée $x \mapsto f(x + a) - f(x - a)$.

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{f(a)} \int_{x-a}^{x+a} f(t)dt$. Donc $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par structure d'ev de $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par linéarité de la dérivation, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{f(a)}(f(x + a) - f(x - a)).$$

(c) Par composition, $x \mapsto f(x + a)$ et $x \mapsto f(x - a)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc, par somme, f' est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$. Mais comme $x \mapsto x - a$ et $x \mapsto x + a$ sont aussi de classes, par composition, on en déduit $x \mapsto f(x - a)$ et $x \mapsto f(x + a)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Donc f' est de classe $\mathcal{C}^1$. Et donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3. On sait que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$. On fixe $y \in \mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc par théorème fondamental de l'intégration, $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f. Donc $x \mapsto \int_0^x f(t)dt \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Or $x \mapsto x - y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \mapsto x + y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc, par composition, $x \mapsto \int_0^{x-y} f(t)dt \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \mapsto \int_0^{x+y} f(t)dt \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc, par structure d'ev, $x \mapsto \int_0^{x+y} f(t)dt - \int_0^{x-y} f(t)dt \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Et donc, enfin, par la relation de Chasles, $x \mapsto \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et de dérivée $x \mapsto f(x+y) - f(x-y)$.

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$ (on rappelle que y est fixé). Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(y) = f(x + y) - f(x - y).$$

Ce résultat étant vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f'(x)f(y) = f(x + y) - f(x - y).$$

On fixe maintenant $x \in \mathbb{R}$ et applique le même raisonnement en faisant varier $y \in \mathbb{R}$. Par Chasles et théorème fondamental de l'intégration (et composition), $y \mapsto \int_{x-y} x + yf(t)dt$ est dérivable de dérivée $y \mapsto f(x+y) + f(x-y)$. Or $\forall y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$. Donc :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(x)f'(y) = f(x + y) + f(x - y).$$

Comme cette relation est vraie pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, on a donc montré

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f'(y) = f(x + y) + f(x - y).$$

4. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. On vient de montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(y) = f(x + y) - f(x - y).$$

Or f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2c. Donc $x \mapsto f'(x)f(y)$ est dérivable et de dérivée $x \mapsto f''(x)f(y)$. Par composition, $x \mapsto f(x+y) - f(x-y)$ est aussi dérivable et de dérivée $x \mapsto f'(x+y) - f'(x-y)$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y).$$

Comme cette relation est valable pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, en fait on a donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y).$$

On procède de la même manière sur l'autre relation de la question précédente. Si $x \in \mathbb{R}$ fixé, $y \mapsto f(x)f'(y)$ est dérivable puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $y \mapsto f(x)f''(y)$. L'application $y \mapsto f(x+y) + f(x-y)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et par dérivation d'une composée,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y).$$

Et cette relation est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, on peut en déduire que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y).$$

En particulier, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x)f(a) = f(x)f''(a) \iff \forall x, y \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{f''(a)}{f(a)}f(x).$$

Donc f est bien solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0 \qquad (\mathcal{E}_\lambda)$$

avec $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$.

Partie 2 : Étude d'une fonction

On considère la fonction $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

5. Soit $x \in]0,1[$. Donc $0 < x < 1$. Alors $0 < x^2 < x < 1$ en multipliant par $x > 0$. Donc $x, x^2 \in]0,1[$. Si $x \in]1,+\infty[$, alors $x > 1$ et donc $x^2 > x > 1$ pour la même raison. Donc $x, x^2 \in]1,+\infty[$.

Dans tous les cas, x et x^2 sont du même côté de 1.

6. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Si $x \in]0,1[$, alors $[x^2, x] \subset]0,1[$ et donc $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[x^2, x]$. Donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0,1[$.

Si $x \in]1,+\infty[$, alors $[x, x^2] \subset]1,+\infty[$. Donc $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[x, x^2]$. Donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in]1,+\infty[$.

Finalement, f est définie sur $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

7. On va de nouveau utiliser le théorème fondamental de l'intégration. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivable sur $]0,1[$ à valeur dans $]0,1[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$. Donc, par théorème fondamental de l'intégration $x \mapsto \int_{1/2}^x \frac{dt}{\ln(t)} \in \mathcal{D}^2(]0,1[,\mathbb{R})$. Et donc, par composition est Chasles, $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \in \mathcal{D}^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

De même, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivable sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $]1,+\infty[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Donc, toujours grâce au théorème fondamental, Chasles et composition, f est dérivable sur $]1,+\infty[$.

Finalement, f est dérivable sur $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et en plus :

$$\forall x \in D_f,\ f'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

8. Étude de f au voisinage de 1.

(a) On sait que

$$\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

D'où, en posant $x = 1+h$,

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{=} (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

(b) On en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln(x)} &\underset{x\to 1}{=} \frac{1}{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)} \\
&\underset{x\to 1}{=} \frac{1}{x-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}(x-1)+o(x-1)} \\
&\underset{x\to 1}{=} \frac{1}{x-1}\left(1+\frac{1}{2}(x-1)+o(x-1)\right) && \text{DL}_1(0) \text{ de } \frac{1}{1-y} \\
&\underset{x\to 1}{=} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o(1).
\end{aligned}$$

(c) De la question précédente, on déduit

$$f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \underset{x\to 1}{=} 1 + \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1) \xrightarrow[x\to 1]{} 1.$$

Et aussi

$$\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}.$$

(d) On vient de montrer que $\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}$. Par définition des limites, on a donc

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ |x-1| < \eta,\ \left|\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

En posant alors $\alpha = \frac{\eta}{\eta+1}$ par exemple (ou n'importe quoi d'autre), alors $0 < \alpha < 1$ et $\alpha < \eta$. On a donc

$$\exists \alpha \in]0,1[,\ \forall x \in D_f \cap]1-\alpha, 1+\alpha[,\ \left|\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} - 1\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Puis, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a donc

$$\begin{aligned}
\exists \alpha \in]0,1[,\ \forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\},\ \left|\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\right| &= \left|\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} - 1 + 1\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} - 1\right| + 1 \\
&\leq \frac{1}{2} + 1 \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(e) Soit $x \in]1,+\infty[$. Alors

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = [\ln(t-1)]_x^{x^2} = \ln(x^2-1) - \ln(x-1) = \ln(x+1).$$

Soit $x \in]0,1[$, alors

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = -\int_x^{x^2} \frac{dt}{1-t} = [\ln(1-t)]_x^{x^2} = \ln(1-x^2) - \ln(1-x) = \ln(1+x).$$

Donc finalement,

$$\forall x \in D_f,\ \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \ln(x+1).$$

(f) On reprend le $\alpha \in]0,1[$ de deux questions précédentes tel que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\backslash\{1\},\ \left|\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\right| \leq \frac{3}{2}.$$

Soit $x \in]1, \sqrt{1+\alpha}[$. Alors $1 < x^2 < 1+\alpha$ et $x < \sqrt{1+\alpha} \leq 1+\alpha$. Donc :

$$\begin{aligned}
|f(x) - \ln(1+x)| &= \left|\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}\right| && \text{cf calcul précédent}\\
&= \left|\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{x-1}\right) dt\right| && \text{linéarité de l'intégrale}\\
&\leq \int_x^{x^2} \left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{x-1}\right| dt && \text{inéga triang car } x \leq x^2\\
&\leq \int_x^{x^2} \frac{3}{2} dt && \text{cf question précédente et croissance de l'intégrale}\\
&= \frac{3(x^2-x)}{2}\\
&= \frac{3|x^2-x|}{2}
\end{aligned}$$

Soit maintenant $x \in]\sqrt{1-\alpha}, 1[$. Alors $1-\alpha < x^2 < 1$ et $1-\alpha \leq \sqrt{1-\alpha} < x$. Donc :

$$\begin{aligned}
|f(x) - \ln(1+x)| &= \left|\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}\right| && \text{cf question précédente}\\
&= \left|\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{x-1}\right) dt\right| && \text{linéarité de l'intégrale}\\
&= \left|\int_{x^2}^{x} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{x-1}\right) dt\right|\\
&\leq \int_{x^2}^{x} \left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{x-1}\right| dt && \text{inéga tri}\\
&\leq \int_{x^2}^{x} \frac{3}{2} dt && \text{car } 1-\alpha < x, x^2 < 1\\
&= \frac{3(x-x^2)}{2}\\
&= \frac{3|x^2-x|}{2}.
\end{aligned}$$

On vient donc de montrer que

$$\forall x \in]\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{1+\alpha}[\backslash\{1\},\ |f(x) - \ln(1+x)| \leq \frac{3|x^2-x|}{2}.$$

Par ailleurs, $\frac{3|x^2-x|}{2} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. Donc $f(x) - \ln(1+x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ par corollaire du théorème des gendarmes. Or $\ln(1+x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)$.

(g) Comme f est continue sur $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et que $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)$, on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln(2)$.

Ici, une fois prolongée, on a f continue sur $]0,+\infty[$ par la début de la question, dérivable sur $]0,+\infty[\backslash\{1\} = D_f$ d'après la question 7 et $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 1$ d'après la question 8c. Donc, par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée sera continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une fois prolongée par continuité en 1.

9. Étude de f au voisinage de 0.

(a) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction inverse étant décroissante, par composition, on en déduit $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est décroissante sur D_f.

Soit $x \in]0,1[$. Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$, on en déduit

$$\forall t \in]x^2, x[, \ \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)}.$$

Puis, par croissance de l'intégrale sur les segments,

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt \geq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)} dt = \frac{x - x^2}{\ln(x)}.$$

D'où

$$f(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} = -\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)} \leq \frac{-x}{\ln(x)}.$$

D'autre part, $\forall t \in [x^2, x]$, $\frac{1}{\ln(t)} \leq 0$. Donc, par positivité de l'intégrale $\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln(t)} \leq 0$ et donc,

$$f(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} = -\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln(t)} \geq 0.$$

D'où $0 \leq f(x) \leq \frac{-x}{\ln(x)}$ pour tout $x \in]0,1[$.

Or $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Donc, par théorème des gendarmes $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Or f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 à droite en posant $f(0) = 0$.

(b) On vient de voir que f est prolongeable en 0 à droite en posant $f(0) = 0$. D'autre part, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \ f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln(x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

d'après ce qui a été fait précédemment. Donc $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Et donc f est dérivable en 0 en réutilisant le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ rappeler au-dessus. Et on a $f'(0) = 0$.

10. Finalement, on peut résumé ce qu'on vient de voir par le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$+$	1	$+$	
f	0		$\ln(2)$		

11. On a $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$. Cette application est dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$, $f''(x) = \frac{x\ln(x) - x + 1}{x\ln(x)^2}$. On va étudier la fonction intermédiaire $h : x \mapsto x\ln(x) - x + 1$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $h'(x) = \ln(x)$. Donc on a le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
h	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	

Donc $\forall x \in D_f$, $f''(x) > 0$ et donc f' et strictement croissante sur D_f. Mais comme f' est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que f' est strictement croissante sur R_+.

12. Calcul d'une intégrale.

(a) La fonction $t \mapsto \frac{1-t}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$ et elle est prolongeable par continuité en 1 puisque $\frac{1-t}{\ln(t)} = f'(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 1$ d'après ce qui précède. Elle est également prolongeable par continuité en 0 par 0. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1-t}{\ln(t)}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$ dont l'intégrale est alors bien définie sur ce segment. Donc $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln(t)}dt$ est donc bien définie en tant qu'intégrale de la prolongée de $t \mapsto \frac{1-t}{\ln(t)}$.

(b) Soit $x, y \in]0,1[$. Alors, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ donc en particulier sur le segment défini par y^2 et x^2 (selon l'ordre) avec $dt = 2udu$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} &= \int_y^x \frac{2udu}{\ln(u^2)} && \text{chgmt var} \\
&= \int_y^x \frac{udu}{\ln(u)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} - \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln(t)} \\
&= \int_x^y \frac{dt}{\ln(t)} + \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln(t)} + \int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} - \int_y^{y^2} \frac{dt}{\ln(t)} && \text{Chasles} \\
&= \int_x^y \frac{dt}{\ln(t)} + \int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \\
&= \int_x^y \frac{dt}{\ln(t)} + \int_y^x \frac{udu}{\ln(u)} && \text{question précédente} \\
&= \int_x^y \frac{1-t}{\ln(t)}dt && \text{linéarité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

(c) Par continuité de la fonction f en 0 et 1, on a donc $\forall x \in]0,1[$, $f(x) - f(1) = \lim_{y\to 1}(f(x) - f(1)) = \int_x^1 \frac{1-t}{\ln(t)}dt$ et aussi $f(0) - f(1) = \lim_{x\to 0}(f(x) - f(1)) = \int_0^1 \frac{1-t}{\ln(t)}dt$. Donc

$$\int_0^1 \frac{1-t}{\ln(t)}dt = f(0) - f(1) = -\ln(2).$$