DM 10

Étude d'un endomorphisme de polynômes

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 11 Juin 2024

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. (a) Justifier que
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt \end{array}$$
est un produit scalaire sur E.
   (b) Justifier que $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P,Q) = \langle XP|Q\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. On suppose qu'il existe un endomorphisme φ de E_n tel que
$$\forall P, Q \in E_n \ \ \langle P|\varphi(Q)\rangle = \Phi(P,Q).$$
   (a) Montrer que, pour tout $Q \in E_n$, $\varphi(Q) - XQ$ est orthogonale à tout $P \in E_n$.
   (b) Montrer que si $\deg(Q) \leq n-1$, alors $\varphi(Q) = XQ$.
   (c) On se place dans le cas $n = 2$. On vient de voir que $\varphi(1) = X$ et $\varphi(X) = X^2$. Posons $\varphi(X^2) = aX^2+bX+c$.
   En exprimant le fait que $\varphi(X^2) - X^3$ est orthogonal à 1, X et X^2, montrer que $\varphi(X^2) = \frac{3}{5}X$.
   (d) Former la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E_2 et calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de $M - \lambda I_3$.
   (e) En déduit les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M - \lambda I_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

   On admettra dans la suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un endomorphisme unique de E_n tel que $\forall P, Q \in E_n$, $\Phi(P,Q) = \langle P|\varphi(Q)\rangle$.
3. Montrer que $\forall P, Q \in E_n$, $\langle P|\varphi(Q)\rangle = \langle \varphi(P)|Q\rangle$. *On dit alors que φ est un endomorphisme de E_n symétrique.*
4. On admet qu'il existe une base orthonormale $(U_0, \ldots, U_n)$ de E_n et une famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires tels que $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\varphi(U_k) = \alpha_k U_k$.
   (a) Montrer que $\forall P, Q \in E_n$, $\Phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle P|U_k\rangle \langle Q|U_k\rangle$.
   (b) Montrer que $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $|\alpha_k| < 1$.
5. On pose, $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\gamma_k = \langle 1|U_k\rangle$.
   (a) Montrer que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $\left\langle X^k \middle| U_i \right\rangle = \alpha_i^k \gamma_i$.
   (b) En déduire que, $\forall P \in E_n$, $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $\langle U_i|P\rangle = \gamma_i \widetilde{P}(\alpha_i)$.
   (c) Montrer que $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $\gamma_i \widetilde{U_i}(\alpha_i) \neq 0$. En déduire que $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $\gamma_i \neq 0$.
   (d) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p + 1 = \mathrm{Card}(\{\alpha_i, \ 0 \leq i \leq n\})$. On réindexe les α_i de manière que les $p+1$ premiers soient deux à deux distincts. Ainsi, pour tout $j > p$, α_j est égal à l'un des α_i pour un certain $i \leq p$.
   On pose $R_n(X) = \prod_{i=0}^{p}(X - \alpha_i)$.
   En considérant les produits scalaires $\langle U_i|R_n\rangle$, montrer que les réels α_i sont deux à deux distincts. En déduire que R_n est de degré $n+1$.

(e) On pose

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ L_j(X) = \frac{R_n(X)}{X - \alpha_j} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (X - \alpha_k).$$

Montrer que pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, $\exists \mu_j \in \mathbb{R}$ tel que $U_j = \mu_j L_j$. En déduire

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ \mu_j \gamma_j \widetilde{L_j}(\alpha_j) = 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma_j^2 = \frac{\langle 1 | L_j \rangle}{\widetilde{L_j}(\alpha_j)}.$$

6. (a) Montrer que

$$\forall P \in E_{2n+1},\ \int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t) dt = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \widetilde{P}(\alpha_i). \tag{1}$$

Indic : *On pourra considérer l'égalité pour le polynôme* 1 *puis pour les* X^k, $1 \leq k \leq 2n+1$.

(b) Montrer que cette égalité n'est vraie pour aucun polynôme de degré $2n+2$.

7. (a) Étant donné $P \in E_n$, calculer le produit scalaire de P et $R_n(X) = \prod_{i=0}^{n} (X - \alpha_i)$.

(b) Soit V_n un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant 1. Montrer que si V_n est orthogonal à tout $P \in E_n$, alors $V_n = R_n$. En déduire que l'on peut déterminer R_n par un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues (ce qui permet d'éviter de chercher les α_i au préalable).

(c) Établir une relation simple entre $R_n(X)$ et $R_n(-X)$.

(d) Exemple : avec $n = 2$, déterminer R_2 puis les α_i. En déduire les polynômes L_j puis les réels γ_j^2.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should h
been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how m
pages to expect for this document.