DM 11
Règle de Raabe-Duhamel

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

9 juin 2024

Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé la règle de Raabe-Duhamel. Cette règle un raffinement du cas non concluant de la règle de convergence de D'Alembert. Dans la deuxième partie, on applique ce résultat à l'étude de certaines séries particulières.

Partie A : Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positif telle que

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{\lambda}{n}+o(1/n).$$

1. On suppose $\lambda<0$.
   (a) Montrer que $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$.
   (b) En déduire que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. Soit $\beta\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{1}{n^\beta}$. Montrer qu'il existe $\mu\in\mathbb{R}$ indépendant de n à déterminer tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\mu}{n}+o(1/n).$$
3. On suppose $\lambda>1$. On se propose de montrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $1<\beta<\lambda$.
   (a) Montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) Déterminer un réel $K\geq 0$, indépendant de n, tel que $\forall n\geq N$, $u_n\leq Kv_n$.
   (c) Prouver que la série $\sum u_n$ converge.
4. On suppose $0\leq\lambda<1$. Montrer, par un raisonnement analogue, que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β judicieusement pour que la série $\sum v_n$ diverge).
5. Pour $n\geq 2$, on pose $x_n=\frac{1}{n}$ et $y_n=\frac{1}{n\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$. Que peut-on en déduire pour le cas $\lambda=1$ pour la règle de Raabe-Duhamel ? (Exceptionnellement et pour gagner un peu de temps, vous pouvez utiliser le résultat de convergence des séries de Bertrand fait en exemple dans le cours, mais idéalement, il faudrait le redémontrer ici).
6. Énoncer la règle de Raabe-Duhamel que nous venons de prouver. La comparer avec la règle de D'Alembert et commenter.

Partie B : Applications de Raabe-Duhamel

Les trois questions sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

7. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.
8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.
   (a) Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée strictement positive.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{2^n} + 4n(I_n - I_{n+1})$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.
9. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ fixé. On pose

$$a_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k).$$

   (a) À l'aide de la règle de Raabe-Duhamel, montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
   (b) Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.
   (c) On suppose $-1 < \alpha < 0$.
      i. Prouver que $\ln(|a_n|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
      ii. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.