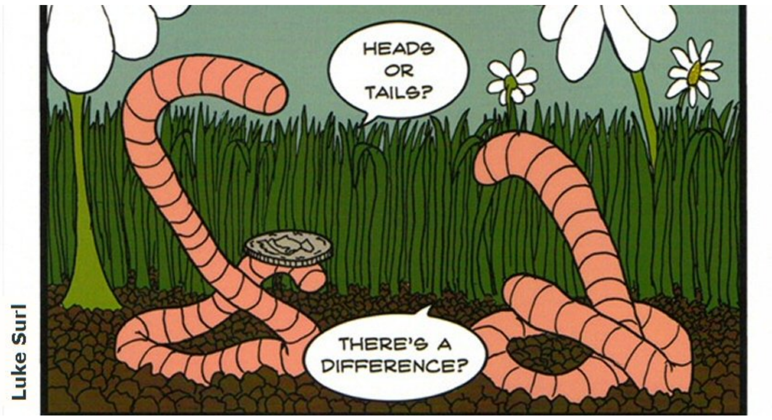
Chapitre 29
Probabilités

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

11 juin 2024



Ce chapitre prend la suite directe du chapitre sur le dénombrement. Nous allons nous en servir pour calculer les probabilités qu'un événement donné survienne.

En réalité, ce chapitre n'est qu'une introduction au chapitre de probabilités de MP dans lequel vous mêlerez les probabilités, les séries et les séries entières. Les probabilités sont un bon moyens pour mêler un bon nombre de chapitre d'analyse. Les probabilités n'étant qu'un prétexte pour faire de l'analyse.

Toute connaissance dégénère en probabilité.

David Hume (1711-1776)

Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ?

Henri Poincaré

On voit, par cet Essai, que la théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul ; elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent s'en rendre compte.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Table des matières

Il y a plusieurs difficultés en probabilités. La première est un problème de vocabulaire. Les probabilités consistent essentiellement à travailler avec des objets mathématiques que nous avons déjà vu (ensembles finis, sous-ensembles etc). Mais tous ces objets auront de nouvelles dénominations. Il s'agit donc de s'habituer à ce nouveau vocabulaire.

Mais la plus grande difficulté des probabilités provient des questions de modélisations. Il s'agit de modéliser mathématiquement une situation concrète décrite. Il faut alors faire le bon choix de modélisation en fonction de ce qui nous intéresse. Et donc, il y a des problèmes d'interprétations qui rentrent en jeu.

1 Univers fini et Événements

Définition 1.1 (Univers, issues) :

- L'ensemble des résultats considérés d'une expérience aléatoire est appelé univers et est généralement noté Ω.
- Les éléments ω de Ω sont appelés issues de l'expérience aléatoire (ou résultats).

Bien sûr, pour commencer, dans cette partie, on se place dans le cas où Ω est fini.

Exemple 1.1 :
On lance deux dés pour jouer au jeu de l'oie. Donner l'univers correspondant au lancé de dés.

On lance deux dés discernable (noir / blanc, par exemple) pour choisir une position d'un pion sur un échiquier de 6 cases par 6 cases. Déterminer l'univers de ce lancement de dés.

L'univers que l'on considère dépend donc de l'expérience et de ce qu'on considère comme résultat de ladite expérience. Et l'un et l'autre sont déterminé par la description (en français) dans l'énoncé de l'expérience. Il faudra donc lire (et comprendre) correctement l'énoncé. La suite de l'exercice en dépendra.

Remarque :
En sup, les univers sont automatiquement finis. C'est le cadre du programme qui l'impose. En spé, les univers pourront être infinis. Toutefois, pour rester dans le cadre des probabilités discrètes, ils devront alors être dénombrables au maximum (donc en bijection avec $\mathbb{N}$).

Définition 1.2 (Événement) :
Soit Ω un univers d'une expérience aléatoire. On appelle *événement* de Ω toute partie A de Ω. Si $A = \{\omega\}$, on dit que A est un *événement élémentaire*.

Lorsque l'expérience aléatoire a lieu, elle détermine un résultat $\omega \in \Omega$. On dit que A *est réalisé* par cette expérience selon si $\omega \in A$ ou non.

Exemple 1.2 :
On tire un dé et on note le numéro de la face obtenue. Donc $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'événement élémentaire $A = \{6\}$ traduit le résultat "on a obtenu un 6". Et l'événement $B = \{2, 4, 6\}$ traduit "on a obtenu un chiffre pair".

On considère un jeu de n cartes numérotées de 1 à n et on mélange le paquet. L'univers de l'expérience aléatoire est $\Omega = \mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations possibles de toutes les cartes. On considère A l'événement "la carte 1 se trouve dans la première moitié du paquet". Donc $A = \{\omega \in \Omega,\ \omega(1) \leq n/2\}$.

Remarque :
Pour un univers fini Ω, l'ensemble des événements sera presque toujours $\mathcal{P}(\Omega)$. Ce ne sera pas nécessairement le cas pour des univers infinis.

Définition 1.3 (Événement contraire) :
Soit Ω un univers et $A \subset \Omega$ un événement. On appelle événement contraire de A l'événement $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Remarque :
On rappelle que la notation $\overline{A}$ est ambiguë car on ne sait pas rapport à quel ensemble on prend le complémentaire de A. Mais ici, le référentiel est sous-entendu mais toujours parfaitement défini. On ne peut pas faire de probabilité sans connaissance de l'univers. Et toute se rapporte toujours à cet univers. Aussi l'ambiguïté n'est en fait qu'apparente.

Exemple 1.3 :
On considère toujours un lancé de dé. L'événement contraire de "le tirage est un nombre pair" est "le tirage est un nombre impair".

Remarque :
Vous aurez remarqué à cette étape une imprécision dans la formule des énoncés. Stricto sensu, “le tirage est pair” fait référence à tous les nombre pair. Mais ici, bien sûr, il est sous-entendu que l'on ne considère que les chiffres de l'univers, que les chiffres qu'il est possible d'obtenir par l'expérience aléatoire que l'on considère.

Cette imprécision est intrinsèque au français, au langage utilisé. Ce sont des ellipses nécessaires pour la bonne compréhension du langage. Sans ça, on se noierai en paraphrase et périphrase. Mais les maths ne souffrent pas de ce genre de petits trucs. Il faudra donc bien prendre garde aux énoncés. Ici, l'énoncé est très simple. Mais bientôt, les énoncés seront beaucoup plus compliqué. Et pour ne pas se faire des nœuds aux neurones, il faudra démêler l'imbroglio du charabia de l'énoncé. Ce n'est pas un exercice si facile. C'est même le plus difficile. Ne le sous-estimez pas

Définition 1.4 (Événement impossible, événement certain) :
L'événement $\emptyset$ est appelé événement impossible et l'événement Ω est appelé événement certain.

Remarque :
C'est l'événement impossible puisque dès qu'on test l'expérience, on obtient obligatoirement un résultat et donc ce résultat ne peut pas appartenir à $\emptyset$.

De même, tous résultat de l'expérience est dans Ω. Donc chaque tirage réalise cet événement. C'est donc l'événement certain. Il est certain (il n'y a pas de doute, on est sûr) que cet événement sera réalisé, et ce, quelque soit le résultat du tirage.

Exemple 1.4 :
L'événement certain est l'événement contraire de l'événement impossible. Et vice versa.

Remarque :
Pour des questions de commodité, on confondra souvent l'événement (mathématique) A et l'énoncé qu'il représente. Ce n'est pas très bien. Mais c'est la seule façon de faire pour garder un discours à peu près compréhensible sans tomber dans des formalismes trop compliqué.

Définition 1.5 :
Si A et B sont deux événements de l'univers Ω, alors l'événement $A \cap B$ représente l'événement “A et B” et l'événement $A \cup B$ représente l'événement “A ou B”.

Exemple 1.5 :
On lance toujours un dé. On considère l'événement "on tire un nombre pair" représenté par $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{3, 6\}$ représente l'événement "on tire un multiple de 3". L'événement "A et B" correspond donc à l'événement "on tire un 6" représenté par $\{6\}$ et l'événement "A ou B" est l'événement "on ne tire pas un 1 ni un 5" représenté par $\{2, 3, 4, 6\}$.

> Définition 1.6 (Événement impliqué) :
> Soit A et B deux événements. Si $A \subset B$, alors on dit que l'événement A implique l'événement B.

Comme $A \subset B$, si A est vérifiée, ça veut dire qu'on a tiré un élément de A. C'est donc également un élément de B et donc B est également vérifié. Donc vérifié A entraîne la vérification de B.

> Définition 1.7 (Événements incompatibles) :
> Soit A et B deux événements de Ω. On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

C'est logique. Dire que les événements sont incompatibles veut dire qu'ils ne peuvent se produire en même temps. Donc qu'on ne peut pas réaliser à la fois A et B en même temps et donc que l'intersection est vide.

> Définition 1.8 (Système complet d'événements) :
> On appelle *système complet d'événements* (SCE) d'un univers Ω fini toute famille finie d'événement $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de Ω telle que :
> (i) $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$
> (ii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
> Autrement dit la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une partition de Ω

Exemple 1.6 :
En considérant un lancer de dé, les événements A correspondant à une face paire et B correspondant à une face impaire, forment un système complet d'évènements (assez classique).

Remarque :
Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'événements de Ω, alors tout événement B de Ω peut s'écrire sous la forme $B = \biguplus_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$.

C'est assez évident. On a déjàvu ça avec les partitions dans le chapitre sur les ensembles.

Proposition 1.1 (Systèmes complets d'événements triviaux) :
Soit Ω un univers fini. Alors

(i) Pour tout événement A de Ω, la famille $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements.

(ii) La famille $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ est un système complet d'événements de Ω.

Démonstration :
C'est assez clair. □

Correspondance de vocabulaires

Probabilités	Ensembles	Maths
Univers	Ensemble fini	Ω
Issue	Élément	$\omega \in \Omega$
Événement	Sous-partie	$A \subset \Omega$
Événement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$
Événement réalisé	Élément d'un sous-ensemble	$\omega \in A$
A implique B	Inclusion	$A \subset B$
Événement "A ou B"	Réunion	$A \cup B$
Événement "A et B"	Intersection	$A \cap B$
Événement contraire	Complémentaire	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
Événement impossible	Ensemble vide	$\emptyset$
Événement certain	L'ensemble fini	Ω
Événements incompatibles	Sous-ensembles disjoints	$A \cap B = \emptyset$
Système complet d'événements	Partition	$(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$, $\biguplus_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

2 Loi de Probabilité

2.1 Définition et Propriétés

Définition 2.1 (Loi de probabilité, Espace probabilisé) :
On appelle loi de probabilité sur un univers Ω fini toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A, B \subset \Omega,\ A \cap B = \emptyset,\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

On appelle espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ la donnée d'un univers fini Ω munit d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.

Exemple 2.1 :
On lance un dé. Donc $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On définit une application sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\forall A \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}\operatorname{Card}(A)$$

Alors $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Remarque :
Les probabilistes (les vrais) utilisent les notations avec double barre pour tout ce qui est liés aux lois de probabilités. Toutefois, on peut trouver dans certains énoncés, des notations sans barres. Il peut arriver qu'on note simplement P une loi de probabilité. C'est que l'énoncé n'a pas éété écrit par un probabiliste.

Théorème 2.1 (Événement contraire) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Si A est un événement de Ω, alors

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Démonstration :
On a $\Omega = A \cup \overline{A}$. Par propriété des lois de probabilité, on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$. D'où la formule. □

Corollaire 2.2 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Alors

$$\forall A \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$$

Démonstration :
On a $\forall A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$ et $\mathbb{P}$ est une loi de probabilité. □

Remarque :
La probabilité de l'événement impossible est nulle. Et c'est le seule (pour nous). De même, la probabilité de l'événement certain est 1. Et c'est le seul (pour nous). Tous les autres événements ont une probabilité dans $]0, 1[$.

Remarque (Autre type de probabilité) :
Il existe des espaces probabilisés pour lesquels, il existe des événements de probabilité 0 ou 1 qui ne sont pourtant pas les événements certains ou impossible. Mais il est nécessaire d'avoir un univers infini. On sort donc du cadre du programme.

On appelle un événement de probabilité 1 un événement presque sûr.

Exemple 2.2 :
On considère une urne contenant 5 boule blanche et 10 boule noire indiscernable dont on tire deux boules. Déterminer la probabilité de l'événement $A =$"Le tirage comporte au moins une boule noire" en utilisant la loi de probabilité uniforme.

Théorème 2.3 (Croissance) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A, B \subset \Omega$.

Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Démonstration :
On a $B = A \cup (B \setminus A)$ et la réunion est disjointe. Donc les événements A et $B \setminus A$ sont incompatibles. Et donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$. □

Théorème 2.4 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$.
Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille d'événements de Ω deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Démonstration :
C'est une récurrence en utilisant les propriété des lois de probabilité. Pour $n = 1$, c'est dans la définition d'une loi de probabilité. Supposons que ce soit vraie pour une famille de n événements avec $n \geq 1$.

On considère donc $n+1$ événements de Ω deux à deux disjoints. On considère $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Alors A et A_{n+1} sont des événements incompatibles de Ω. En effet,

$$A \cap A_{n+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}) = \emptyset$$

On en déduit donc

$$\mathbb{P}(A \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. □

Remarque :
Comme on peut toujours écrire $\Omega = \bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}$, on a donc toujours $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Théorème 2.5 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Alors $\forall A, B \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Démonstration :
Il suffit d'écrire $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ avec des réunions disjointe. □

Remarque :
Bien sûr, on pourrait étendre cette formule par récurrence à une réunion de n événements. Mais la formule générale est hors programme. Néanmoins, on notera que pour trois événements, c'est facile

à obtenir :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Définition 2.2 (Propriété vraie presque sûrement) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (fini ou non). Soit A un événement de Ω. On dit que A est presque sûr si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Par extension, si on considère une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant d'un paramètre x, on dira que la propriété est presque sûrement vraie sur Ω si

$$\mathbb{P}(\{x \in \Omega,\ \mathcal{P}(x)\}) = 1$$

Exemple 2.3 :
Deux joueurs jouent à un jeu de lancer de dé. Si la face obtenue est 2, 3, 4 ou 5, le joueur 1 gagne. Si le dé tombe sur 1 ou 6, c'est le joueur 2 qui gagne. Le dé est pipé. Il ne peut pas tomber sur 1. Le joueur a triché, il a installé un petit ressort dans le point de la face 1, de sorte que si le 6 apparaît (et donc la face 1 est contre le sol), il peut activer par une télécommande le ressort pour redresser le dé.

Dans ce cas, le joueur 1 gagne presque sûrement.

Attention, ça ne va pas dire qu'il est absolument certain qu'il gagne. Le ressort pourrait être défectueux. Il ne faut pas confondre la certitude absolue, mathématique qu'un événement ne se produise pas et la probabilité certaine qu'il n'advienne pas.

2.2 Construction d'une loi de probabilité

Si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini, alors P est entièrement déterminé par les $\mathbb{P}(\{\omega\})$ (ce qu'on a déjà laissé entendre). En effet, chaque événement est une réunion fini d'événements élémentaire. Donc :

Théorème 2.6 (Construction d'une loi de probabilité [✓]) :
Soit Ω un univers fini et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille de réels positifs telle que

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$$

Alors il existe une unique loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

Démonstration :
On considère l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ définie par $\forall A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$. On a alors $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$. Et si A et B sont deux événements incompatibles, A et B sont tous les deux des réunions finis d'événements incompatibles, et donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega\in A\cup B}\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega + \sum_{\omega\in B} p_\omega = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. C'est donc bien une loi de probabilité.

Supposons que $\mathbb{G}$ vérifie les mêmes propriétés. Alors $\forall A \subset \Omega$, $A = \bigcup_{\omega\in A}\{\omega\}$ qui est encore une réunion d'événements deux à deux incompatibles. Et donc $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega = \mathbb{G}(A)$. □

2.3 Lois usuelles de probabilités

2.3.1 Loi uniforme

Définition-Propriété 2.3 (Probabilité uniforme) :
Si Ω est un univers fini, on appelle loi de probabilité uniforme sur Ω, l'application

$$\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \end{array}$$

Démonstration :
Très facile. □

On dit que c'est la loi uniforme parce que chaque événement élémentaire à la même probabilité. En effet, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$. La loi de probabilité est donc uniformément répartit sur chacun des événements élémentaire. Aucun ne "pèse" plus lourd qu'un autre.

Remarque :
Le choix de la loi de probabilité à utiliser sur un univers n'est pas toujours explicite. Comme pour l'univers, il est sous-entendu et soumis à interprétation. En général, quand, dans un énoncé, on parle de "choix hasard", on sous-entends qu'il n'y a pas plus de chances d'obtenir une issue plutôt qu'une autre et donc que la loi utilisée est la loi uniforme.

Exemple 2.4 :
Dans un jeu de 52 cartes, on en tire 5. On définit les événements A :"Avoir exactement trois carreaux" et B :"Avoir au moins une paire". Déterminer les probabilités que A et que B soient réalisés.

Exemple 2.5 :
Déterminer la probabilité d'avoir k-fois le chiffre 6 dans un lancer de n dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir tous les chiffre sur un lancer de 6 dés équilibrés ?

Exemple 2.6 :
On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules bleues. On tire trois boules. Déterminer la probabilités des événements A :"les trois boules sont de la même couleur" et B :"Il y a une boule de chaque couleur", si on suppose les tirages :

1. simultanés
2. successifs avec remise
3. successifs sans remise

Exemple 2.7 :
Un lac contient N poissons dont m malades. On pêche n poissons à l'aide d'un filet. Quel est la probabilité d'en avoir exactement k malades ?

2.3.2 Loi de Bernoulli

Définition-Propriété 2.4 (Loi de Bernoulli) :
Soit $\Omega = \{0, 1\}$ et $p \in [0, 1]$.
On définit la loi de Bernoulli $\mathbb{P}$ sur Ω par :

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0,\ \mathbb{P}(\{1\}) = p,\ \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p,\ \mathbb{P}(\{0, 1\}) = 1$$

Alors $\mathbb{P}$ est une loi de probabilité sur Ω.

Démonstration :
C'est évident avec la définition d'une loi de probablité. $\square$

Remarque :
La loi de Bernoulli correspond à une loi non nécessairement uniforme sur une expérience aléatoire du type succès/échec.

Exemple 2.8 :
On considère un lancé d'une pièce pipée. Elle tombe une fois sur trois sur Face.

Remarque :
Dans le cas où $p = 1/2$, on retrouve une loi uniforme sur $\Omega = \{0, 1\}$.

2.3.3 Loi binomiale

Définition-Propriété 2.5 (Loi binomiale) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$ et $\Omega = \{0, \dots, n\}$.
On pose $\mathbb{P}$ définit sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ \mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Alors $\mathbb{P}$ est une loi de probabilité sur Ω.

Démonstration :
Il suffit de reprendre le théorème de construction des lois de probabilités en utilisant Newton. □

Remarque :
La loi binomiale correspond à une succession d'expérience aléatoire du type succès / échec sans tenir compte de l'ordre.

Remarque :
Il existe d'autres lois de probabilités. Notamment la loi hypergéométrique qui est hors programme.

2.4 Probabilités conditionnelles

2.4.1 Définition

Définition 2.6 (Probabilité conditionnelle) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout événement A de Ω, la probabilité de A sachant B est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

La seconde notation n'est pas plus pratique parce qu'on note les événements dans l'ordre inverse de la prononciation. Ce qui n'est pas très agréable. La première est donc meilleure de ce point vue mais un peu plus éprouvante à écrire. C'est celle que j'utiliserais tous le temps, sauf éventuellement pour des raisons esthétiques.

Remarque :
On a toujours

$$\mathbb{P}(B|B) = 1$$

Remarque :
Attention ! La notation $\mathbb{P}(A|B)$ peut porter à confusion ! La notation $(A|B)$ ne correspond pas à un événement (*i.e.* un sous-ensemble de Ω). Donc on ne regarde pas une probabilité d'un événement.

Exemple 2.9 :
On considère un couple de futur parent. Ils vont avoir deux enfants. On suppose qu'il y a autant de chance d'avoir un garçon ou une fille (ce qui n'est pas tout à fait vrai en réalité). Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles, sachant que l'aînée est une fille ? Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

Proposition 2.7 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors l'application

$$\mathbb{P}_B : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) \end{array}$$

définit une probabilité sur Ω.

Démonstration :

D'abord,

$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

et si $A, A' \subset \Omega$ incompatibles, alors

$$\mathbb{P}_B(A \cup A') = \frac{\mathbb{P}(B \cap (A \cup A'))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((B \cap A) \cup (B \cap A'))}{\mathbb{P}(B)}$$

Or $B \cap A$ et $B \cap A'$ sont incompatibles, et donc

$$\mathbb{P}_B(A \cup A') = \frac{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A')}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A')$$

□

Remarque :
En fait, les probabilités conditionnelles sont un changement d'univers. Au lieu de se placer sur l'univers Ω total, on se place maintenant sur le sous-univers B et on considère la loi de probabilité sur B induite par celle de Ω. D'où le terme "sachant que" qui permet de redéfinir l'univers. Au d'autres termes, une probabilité conditionnelle correspond à la probabilité de l'événement A pour un observateur qui arriverait en cours d'expérience, avoir déjà réalisé l'événement B.

Remarque :
Si A et B sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) = 0$ (sous réserve d'existence).

Remarque :
La loi $\mathbb{P}_B$ étant une loi de probabilité, toutes les propriétés sur les lois de probabilités s'appliquent. En particulier, $\mathbb{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(A \cup C|B) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(C|B) - \mathbb{P}(A \cap C|B)$.

Exemple 2.10 :
En lançant un dé à six faces deux fois, quelle est la probabilités d'avoir une somme impaire alors que le premier lancé est pair ?

2.4.2 Probabilités composées

Théorème 2.8 (Formule des probabilités composées [✓]) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A, B deux événements de Ω avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

Démonstration :
Il suffit de l'écrire :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

□

Corollaire 2.9 (Formule des probabilités composées) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements de Ω avec $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)P(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=1}^{i-1}\mathbb{P}(A_{i+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_i)$$

Démonstration :
Récurrence, ou directement par produit télescopique :

$$\mathbb{P}(A_1)\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(A_{i+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_i) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{i+1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_i)} = \mathbb{P}(A_1)\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

□

Remarque :
La formule des probabilités composées correspond à ce qui se passe intuitivement en suivant l'ordre chronologique des événements : on réalise d'abord A_1 ; puis, une fois A_1 réalisé, on réalise A_2 ; puis sachant maintenant que A_1 et A_2 sont réalisés, on réalise A_3 ; etc.

Exemple 2.11 :
On considère une urne contenant 6 boules blanches et 4 boules rouges. On tire successivement 3 boules sans remises. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches ?

Exemple 2.12 :
On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité qu'on tire les 4 as ?

2.4.3 Formule des probabilités totales

Théorème 2.10 (Formule des probabilités totales [✓]) :
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Alors

$$\forall B \subset \Omega,\ \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Démonstration :
On a

$$B = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

Les événements $B \cap A_i$ sont deux à deux incompatibles. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Puis par les probabilités composées,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

□

Remarque :
La formule des probabilités totales s'utilise naturellement dans des disjonctions de cas. Les différents correspondant eux événements du système complet d'événements.

Exemple 2.13 :
On tire successivement trois boules sans remises dans une urne contenant 6 boules blanches et 4 boules noires. Déterminer la probabilité de l'événement $B =$"La troisième boule tirée est blanche".

Dans le cas particulier d'un SCE trivial $(A, \overline{A})$

Corollaire 2.11 (Formule des probabilités totales dans le cas d'un SCE trivial) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers probabilisé fini et A un événement de Ω tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Alors, pour tout événement B de Ω,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B|\overline{A})$$

Remarque :
On peut présenter les choses dans ce cas là sous forme d'un arbre. ⚠ATTENTION ! Un arbre n'est pas une preuve de quoi que ce soit ! C'est un dessin. C'est joli. Ça permet de mieux "voir" ce qui se passe et donc de mieux comprendre (éventuellement de mieux expliquer). Mais ça ne prouve rien.

Exemple 2.14 :
Une compagnie d'assurance estime que ses clients se scindent en deux catégories : Les dangereux qui ont beaucoup d'accidents (20% des clients) et les normaux qui n'ont pas beaucoup d'accidents. Pour les dangereux, la probabilité d'avoir un accident par an est de $1/2$. Pour les normaux, ils ont une chance sur dix d'avoir un accident dans l'année.

Quelle est la probabilité qu'un nouvel assurai ait un accident dans la première année de sa cotisation ?

Exemple 2.15 :
Un laboratoire pharmaceutique réaliser des tests clinique à partir d'un médicament et d'un placebo. On a les résultats suivant :

		Guéris	Non guéris
Hommes	Médicament	18	12
	Placebo	7	3
Femmes	Médicament	2	8
	Placebo	9	21

Soit H l'événement "la personne est un homme", M l'événement "la personne a pris le médicament" et G l'événement "la personne est guérie". Calculer la probabilité d'être guéri sachant qu'on a pris un médicament ou pas. Commentaire ?

Exemple 2.16 :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une urne U contient des jetons numérotés de 1 à p : il y a une boule avec le numéro 1 ; deux boules 2 ; trois boules 3 ; etc. On dispose de p urnes numérotés de 1 à p telles que l'urne numéro i contient i boules blanches et $p - i$ boules noires. On tire un jeton numéro i dans l'urne U puis une boule dans l'urne numéro i.

Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?

2.4.4 Formule de Bayes

Théorème 2.12 (Formule de Bayes [✓]) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A et B deux événements de probabilités non nulles, alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Démonstration :
Il suffit de l'écrire :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

□

Remarque :
Dans l'exemple précédent, on peut alors "remonter le temps" et déterminer la probabilité qu'on ait tiré dans l'urne 1 sachant qu'on a eu une boucle blanche. On a

$$\mathbb{P}(J_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|J_1)\mathbb{P}(J_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{p(p+1)} \times \frac{1}{p}}{\frac{2p+1}{3p}} = \frac{6}{p(p+1)(2p+1)}.$$

Corollaire 2.13 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles de Ω, alors pour tout événement B de Ω et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Démonstration :
C'est la formule de Bayes avec la formule des probabilité totale. □

Remarque :
La formule de Bayes est pratique pour des raisonnements "rétroactif". Si on sait mesurer la conséquence B d'un événement A (*i.e.* $\mathbb{P}(B|A)$) et que l'on sait l'événement B réalisé, la formule de Bayes permet de déterminer si l'événement A a été réalisé aussi ou non (*i.e.* de connaître $\mathbb{P}(A|B)$).

Exemple 2.17 :
Une urne contient deux dés. L'un est équilibré et l'autre est pipé et donne toujours un 6. On choisit un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On suppose qu'on obtient un 6.

Calculer la probabilité pour que le dé tiré soit équilibré.

Exemple 2.18 :
Dans un célèbre jeu américain des années 70, un candidat devait choisir une porte parmi trois, sachant que derrière d'entre elles était cachée une chèvre et la troisième cachait une Ferrari. Une fois le choix du candidat fait, le présentateur qui sait où est la Ferrari, ouvre l'une des porte non choisir par le candidat avec un chèvre derrière. Il propose ensuite au candidat de changé de porte. Le candidat a-t-il plus à y gagner ou perdre à changer de porte ?

Soit F_i l'événement "La Ferrari est derrière la porte numéro i". On a $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_3) = 1/3$. (F_1, F_2, F_3) est un système complet d'événements.

Pour se fixer les idées, réfléchissons sur un exemple de situation. Évidemment, tous les autres cas fonctionneront de la même manière par symétrie du problème. Supposons par exemple, que le candidat ait choisi la porte 1. Soit A l'événement "l'animateur ouvre la porte numéro 3". On cherche $\mathbb{P}(F_2|A)$ pour savoir si le candidat a intérêt à changer de porte. (Si l'animateur ouvre la porte 2, le raisonnement est le même). D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(F_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(A|F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A|F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(A|F_3)\mathbb{P}(F_3)}$$

Or :

- $\mathbb{P}(A|F_1) = 1/2$ car les deux portes restantes contiennent une chèvre.
- $\mathbb{P}(A|F_2) = 1$ car si la Ferrari est derrière la deuxième porte, l'animateur ne peut ouvrir que la troisième porte.
- $\mathbb{P}(A|F_3) = 0$ car l'animateur ne dévoile pas la Ferrari.

Finalement, on trouve $\mathbb{P}(F_2|A) = \frac{2}{3}$ et le candidat a deux fois plus de chances de gagner en changeant de porte qu'en la gardant.

3 Événements indépendants

3.1 Couple d'événements indépendants

Définition 3.1 (Événements indépendants) :
Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que A et B sont indépendants si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque :
L'indépendance traduit le fait que la réalisation ou non d'un événement n'a pas d'influence sur la réalisation du second événement. Leur réalisation sont indépendantes l'une de l'autre.

Exemple 3.1 :
On considère à un double jeu aléatoire avec deux univers finis Ω_1 et Ω_2. On les munis de leur loi uniforme. Et on considère les résultats du double jeu. L'univers est donc $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, muni de la probabilité uniforme.

On considère un événement A_1 de Ω_1 et un événement B_2 de Ω_2. On peut alors considérer l'événement A constitué de toutes les issues réalisant A_1 et l'événement B de toutes les issues réalisation B_2. Autrement dit, $A = A_1 \times \Omega_2$ et $B = \Omega_1 \times B_2$. Il est facile de voir alors que
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A_1)}{\mathrm{Card}(\Omega_1)}, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{\mathrm{Card}(B_2)}{\mathrm{Card}(\Omega_2)}.$$
Par opération sur les ensembles, on a aussi $A \cap B = A_1 \times B_2$ et donc, par loi uniforme,
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\mathrm{Card}(A_1)\,\mathrm{Card}(B_2)}{\mathrm{Card}(\Omega_1)\,\mathrm{Card}(\Omega_2)} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
Or les deux événements A et B sont bien indépendants l'un de l'autre : la réalisation de A n'a pas d'influence sur B car ils correspondent tous les deux à des jeux aléatoires distincts.

Remarque :
Si $\mathbb{P}(B) = 0$, alors B est indépendant de tout événement $A \subset \Omega$.

Proposition 3.1 (Caractérisation des événements indépendants par les probabilités conditionnelles) :
Soit A et B deux événements de $(\Omega, \mathbb{P})$, un univers probabilisé fini, et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors
$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

Démonstration :

C'est très simple

$$A, B \text{ indépendants} \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B)$$

$\square$

Remarque :
On retrouver ici l'indépendance de A et B : que B soit réalisé ou non ne change pas la probabilité que A le soit.

⚠ Attention ! Deux événements incompatibles ne sont pas a priori indépendants ! Ne pas confondre événements indépendants et événement incompatibles.

On lance trois dés équilibrés successivement. On note A l'événement "On tire deux 6" et B l'événement "On tire deux 1". Les deux événements sont bien sûr incompatible puisqu'on ne tire que 3 dés et ils ne sont donc pas indépendants : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3 \times 6/6^3 = 1/12$.

Remarque :
L'incompatibilité est une notion ensembliste et donc dépend du choix des événements A et B. L'indépendance est une notion, elle, probabiliste et donc dépend (de A et B, évidemment, mais aussi) du choix de la loi de probabilité sur Ω. En changeant de loi de probabilité, deux évènements indépendant peuvent ne plus l'être, et inversement.

Une loi de probabilité est la loi qui régit les chances de réalisation d'une issue. Or avoir deux événements indépendants traduit le fait que les réalisation (*i.e.* leur chance de réalisation) n'influent pas les unes sur les autres. Mais en changeant de loi, donc en changeant de chances de réalisation, on peut faire intervenir (ou disparaître) une dépendance.

Exemple 3.2 :
On lance une pièce deux fois. Donc l'univers est $\Omega = \{P, F\}^2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$. On considère les événements A "les deux lancers sont différents" et B l'événement "le deuxième lancer est face".

Si on suppose que la pièce est équilibrée, la loi $\mathbb{P}$ sur Ω est donc la loi uniforme. Et dans ce cas, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(P, F)\}) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Donc les événements A et B sont indépendants.

Si on suppose que la pièce est pipée et qu'elle tombe sur face avec un probabilité $3/4$ et qu'on suppose les deux lancers indépendants (le fait de tomber sur face la première fois ne va pas alourdir la pièce pour changer ses chances de tomber sur face de nouveau), alors $\mathbb{P}(\{(X, Y)\}) = \mathbb{P}(\{X\})\mathbb{P}(\{Y\})$

et $\mathbb{P}(A) = 3/8$, $\mathbb{P}(B) = 1/4$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 3/16 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Cette fois-ci, les événements A et B ne sont plus indépendants. Pourtant, ils n'ont pas changés.

Il n'est pas facile de prévoir l'indépendance de deux événements seulement à partir de leur définition.

Proposition 3.2 (Passage aux événements contraire dans les événements indépendants) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A et B deux événements indépendants de Ω.
Alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration :
C'est un jeu sur les intersection et les passages aux complémentaires. En en fait un :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap (B \cup \overline{B})) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$$

puisque les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles. Donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$$

D'où l'on déduit facilement

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$$

□

!!! ATTENTION !!!

⚠ Si A est indépendant de B et de C, on ne peut rien dire en général de l'indépendance de A et $B \cap C$ ou de l'indépendance de A et $B \cup C$.

Contre-exemple :
On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A "le premier dé donne une face paire", B l'événement "le second dé donne une face pair" et C l'événement "les deux dés faces sont de mêmes parités".
Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais que A n'est indépendant ni de $B \cap C$, ni de $B \cup C$.

3.2 Famille d'événements indépendants

Définition 3.2 (Familles d'événements mutuellement indépendants) :
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements de $(\Omega, \mathbb{P})$, un espace probabilisé fini. On dit que cette famille est une famille d'événements mutuellement indépendants si $\forall m \in \{1, \dots, n\}$, $\forall i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Ce qui revient à dire que $\forall I \subset \{1, \dots, n\}$, $I \neq \emptyset$, $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Remarque :
Autrement dit, il faut des indépendances deux à deux, trois à trois, quatre à quatre etc. Et il les faut tous en même temps. Il faut, en fait, vérifier $2^n - n - 1$ conditions !

Exemple 3.3 :
Avec trois événements A, B et C, ils sont mutuellement indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Il faut les trois.

!!! ATTENTION !!!

⚠ L'indépendance mutuelle est plus forte que l'indépendance deux à deux. L'indépendance deux à deux, c'est seulement $\forall i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$. Ici, on demande plus.

En fait, l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. Puisque la définition de l'indépendance mutuelle contient l'indépendance deux à deux.

Proposition 3.3 (Lien indépendance deux à deux et indépendance mutuelle) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n$ des événements de Ω.

Si $(A_1, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants, alors $(A_1, \dots, A_n)$ sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse si $n \geq 3$.

Démonstration :
Il suffit de prendre $m = 2$ dans la définition.

Et le dernier exemple de la partie précédente fournit un contre-exemple. □

Proposition 3.4 (Passage aux événements contraire dans une famille d'événements mutuellement indépendants) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements de Ω mutuellement indépendants. Si on pose $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$.

Alors $(B_1, \dots, B_n)$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Démonstration :
Supposons qu'il n'y ait qu'un seul passage au complémentaire. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $B_k = \overline{A_k}$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$, $B_i = A_i$.

Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$ non vide. Si $k \notin I$, lors $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(B_i)$.

Supposons $k \in I$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} B_i) &= \mathbb{P}\left(\overline{A_k} \bigcap_{i \in I \setminus \{k\}} A_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I \setminus \{k\}} A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i\in I\setminus\{k\}} \mathbb{P}(A_i) - \prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\\
&= (1-\mathbb{P}(A_k)) \prod_{i\in I\setminus\{k\}} \mathbb{P}(A_i)\\
&= \mathbb{P}(\overline{A_k}) \prod_{i\in I\setminus\{k\}} \mathbb{P}(A_i)\\
&= \prod_{i\in I}\mathbb{P}(B_i)
\end{aligned}
$$

Et on termine en faisant une récurrence sur le nombre de complémentaire que contient la famille $(B_1, \ldots, B_n)$. □

Exemple 3.4 :

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements de Ω mutuellement indépendants. Soit $p \in \{1, \ldots, n-1\}$. Montrer que les événements suivants sont indépendants : $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$.