Chapitre 29 - TD : Probabilité

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

11 juin 2024

1 Mise en jambes

Exercice 1 :
Soit A, B, C trois événements d'une espace probabilisable Ω. Exprimer les événements suivants :

1. Aucun des événements A, B ou C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements A, B ou C est réalisé.
3. Au moins deux des trois événements A, B ou C sont réalisés.
4. Pas plus de deux des trois événements A, B ou C ne sont réalisés.

Exercice 2 :
Soit A, B, C trois événements d'un espace probabilisable Ω.

1. Vérifier que $(A \cup B) \cap C$ entraîne $A \cup (B \cap C)$
2. A quelle condition sur les événements A et C, les événements précédents sont-ils égaux ?

Exercice 3 :
Soit $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

1. Déterminer une probabilité $\mathbb{P}_1$ sur Ω telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.
2. Déterminer une probabilité $\mathbb{P}_2$ sur Ω telle que la probabilité de l'événement $\{1, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 4 :
Soit a, b, c trois éléments distincts d'un ensemble quelconque. A quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant

$$\mathbb{P}(\{a, b\}) = x \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{b, c\}) = y$$

Exercice 5 :
Soit A, B deux parties d'un ensemble fini Ω vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap \overline{B} \neq \emptyset, \quad \overline{A} \cap B \neq \emptyset, \quad \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$$

A quelle condition sur $(a, b, c, d) \in]0, 1[^4$ existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω vérifiant

$$\mathbb{P}(A|B) = a, \quad \mathbb{P}(A|\overline{B}) = b, \quad \mathbb{P}(B|A) = c, \quad \mathbb{P}(B|\overline{A}) = d$$

Exercice 6 :
On dispose de r boules à l'intérieur de n urnes avec $r \leq n$. Chaque urne pouvant contenir plusieurs boules. On suppose qu'on a équiprobabilité.

1. Déterminer la probabilité de l'événement

A : "chaque urne contient au plus une boule"

2. De même avec

B : "Il existe une urne contenant au moins deux boules"

Exercice 7 :

1. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un six ?
2. Même question avec deux dés pour obtenir un double six ?

Exercice 8 :
Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10. On tire sans remise trois boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
2. Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant ?
3. Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large ?

Exercice 9 :
Soit $\Omega = \mathfrak{S}_n$ muni de la loi uniforme $\mathbb{P}$.
Déterminer la probabilité que 1 et n soient dans la même orbite d'une permutation.

Exercice 10 :
Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire toutes les boules successivement et sans remise.

1. Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant, non nécessairement successivement (exemple : 8,2,1,3,6,4,5,7).
2. Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant et consécutivement (exemple : 8,2,1,3,5,7,6,4).

Exercice 11 :
On considère un jeu de n cartes numérotées de 1 à n. On mélange les cartes.

1. Quelle est la probabilité que la carte 1 soit plus loin dans le paquet que la carte 2 ?
2. Quelle est la probabilité que les cartes 1 et 2 soient voisines ?

2 Proba conditionnelles

Exercice 12 :
Soit A et B deux événements avec $\mathbb{P}(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(A \cap B | A \cup B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B | A)$$

Exercice 13 :
Soit A, B, C trois événements avec $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$. Vérifier

$$\mathbb{P}(A | B \cap C)\mathbb{P}(B|C) = \mathbb{P}(A \cap B | C)$$

Exercice 14 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$.
Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B | A \cup B) \leq \mathbb{P}(A \cap B | A).$$

Exercice 15 (**) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A, B deux événements. Montrer que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 16 :
On considère N coffres avec une probabilité p qu'un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres dans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 17 :
Gauss a une boîte à gâteaux contenant 8 cookies choco-pépites et 2 cookies caramel au beurre salé. Il pioche trois cookies dans la boîte et le mange à chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité qu'il mange au moins un cookie au caramel ?
2. Sachant qu'il a mangé un cookie au caramel, quelle est la probabilité que le premier cookie mangé soit au caramel ?

Exercice 18 :
Une famille possède deux enfants.

1. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
2. Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
3. On sait que l'un des deux enfants est un garçon. Quelle est la probabilité que le deuxième le soit aussi ?
4. On sait que l'un des deux enfants est un garçon et est né un 29 février. Quelle est la probabilité que le deuxième soit un garçon ?

Exercice 19 :
5 cartes d'une jeu de 52 sont servies à un joueur de Poker.

1. Quelle est la probabilité que celle-ci comporte exactement une paire d'As ?
2. Même question sachant que le jeu distribué comporte au moins un As ?

Exercice 20 (Urnes de Polya) :
Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On tire de celle-ci une boule, on note sa couleur et on la remet accompagnée de d boules de la même couleur. On répète l'expérience autant de fois qu'on en a envie.

Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ème tirage.

Exercice 21 :
Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type "oui" ou "non" (ou 0 ou 1). Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transmet en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1.

On suppose que $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$?

Exercice 22 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $A \subset \Omega$ et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'évènement de A tel que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$. Soit $B \subset \Omega$ tel que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(B|A_k)$ ne dépende pas de k.

Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(B|A_k) = \mathbb{P}(B|A)$.

Exercice 23 (**) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A, B, C trois évènements tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(C|A) = \mathbb{P}(C|B) = \frac{1}{2}.$$

Calculer $\mathbb{P}(C)$ sachant que $\mathbb{P}(C)$ est l'inverse d'un entier.

Exercice 24 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Une urne contient b boule blanche et c boules de couleur. On fait un tirage avec les règles suivantes :

- Si la boule tirée est blanche, on la retire définitivement de l'urne.
- Si la boule tirée est colorée, on la replace dans l'urne.

Déterminer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages.

3 Événements indépendants

Exercice 25 :
Montrer qu'un événement A est indépendant de tout autre événement ssi $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$

Exercice 26 :
On suppose $A \cap B = \emptyset$. A quelle condition les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 27 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini tel que $p = \mathrm{Card}(\Omega)$ soit un nombre premier et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.

Montrer que deux événements A et B non trivial (*i.e.* $0 < \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) < 1$) ne peuvent être indépendants.

Exercice 28 :
Soit A, B, C trois événements tels que A et $B \cup C$ sont indépendants, ainsi que A et $B \cap C$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 29 :
Soit A, B, C trois événements. On suppose A indépendant de $B \cap C$ et B indépendant de $A \cap C$ et C indépendant de $A \cap B$. On suppose aussi que A est indépendant de $B \cup C$ et $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$.
2. À l'aide d'une disjonction de cas, établir que les événements A, B, C sont mutuellement indépendants.

Exercice 30 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Montrer qu'il n'existe par d'événements $A_1, \dots, A_n$ mutuellement indépendants, de réunion Ω et de même probabilité $p \in]0, 1[$.

Exercice 31 :
On considère une pièce pipée dont la probabilité de tomber sur Pile est $p \in]0, 1[$. On lance la pièce trois fois successivement. On nomme A l'événement "Les deux premiers lancers donnent le même résultat" et B l'événement "Les deux derniers lancers donnent le même résultat".

Déterminer $p \in]0, 1[$ pour que les évènements A et B soient indépendants.

Exercice 32 (***) :
Soit $n \geq 2$ un entier. On définit une probabilité uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Pour un entier p divisant n, on introduit l'événement

$$A_p = \{1 \leq k \leq n, \ p | k\}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$
2. Soit p et q deux diviseurs de n. On suppose p et q premiers entres eux. Montrer que les événements A_p et A_q sont indépendants.

   Plus généralement, montrer que si $p_1, \dots, p_r$ sont des diviseurs deux à deux premiers entre eux, alors les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. On note
$$B = \{1 \leq k \leq n, \ \mathrm{pgcd}(k, n) = 1\}$$
   Montrer que
$$\mathbb{P}(B) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$
4. [Fonction indicatrice d'Euler] On note $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ la fonction indicatrice d'Euler définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers $k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $k \wedge n = 1$.

   Donner une expression de $\varphi(n)$ en fonction de n.

Exercice 33 :
Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à
$$e^{-\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)}$$

Exercice 34 (Inégalités de Boole-Fréchet) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A_1, \dots, A_n$ des évènements de Ω.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - n + 1.$$
2. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \leq \min_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(A_i).$$
Que peut-on dire dans le cas d'égalité ?

4 Pot-Pourri

Exercice 35 :
Il est bien connue que dans une population de cygne, se cache toujours un vilain petit canard. Des scientifiques établissent qu'autour d'un certain lac (le Lac des Cygnes ...), un œuf sur 10 000 est un vilain petit canard. Mélusine, la bonne fée, veut mettre en place un sortilège pour savoir si un œuf sera un vilain petit canard.

Le sortilège est positif chez 99% des œufs mais aussi faussement positif chez 0.1% des œufs de cygnes. Un œuf est testé et a un résultat positif.

Quelle est la probabilité que ce soit l'œuf d'un vilain petit canard ? Qu'en conclure ?

Exercice 36 :
Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un 6 une fois sur 2, les autres faces étant équilibrées.

On tire au hasard un dé de la pochette et on le lance.

1. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
2. Au contraire, on a eu un 5. Même question ?

Exercice 37 :
Dans une entreprise, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles acceptables.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Exercice 38 (Loi de succession de Laplace) :
On considère $n+1$ urnes numérotées de 0 à n telles que l'urne $k \in \{0, \dots, n\}$ contienne $n-k$ boules noires et k boules blanches. On choisit une urne au hasard et on effectue des tirages avec remises au hasard dans cette urne.

1. Déterminer la probabilité p_n que les $N \in \mathbb{N}^*$ premiers tirages amènent des boules blanches. Déterminer la limite de p_n.
2. Déterminer la probabilité q_n que la $(N+1)$-ème boule tirée soit noire, sachant que les N premières boules tirées étaient blanches. Déterminer la limite de q_n.

Exercice 39 (Loi de Hardy-Weinberg) :

Considérons un gène sui se présente sous deux allèles A et a dans une population donnée. Un individu dispose de deux allèles d'un même gène, donc AA, Aa ou aa. Un individu reçoit un allèle de chacun de ses parents au hasard.

Notons p, q, r les proportions des génotypes dans un génération et P, Q, Q les proportion des même génotypes dans la génération suivante. Montrer que $Q^2 = 4PR$.