NOM :
Prénom :

Mardi 11 Juin 2024

Interrogation 29
Espaces Préhilbertiens Réels
Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'un produit scalaire.

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Un produit scalaire φ sur E est une application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall y \in E$, $x \mapsto \varphi(x, y)$ et $x \mapsto \varphi(y, x)$ sont linéaires (forme bilinéaire) ; $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrique) ; $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$ (positive) et $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$ (définie).

2. Théorème de Pythagore.

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs de E. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Il y a équivalence si, et seulement si, $n = 2$.

3. Identités remarquables.

Soit E un espace préhilbertien réel, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associé au produit scalaire sur E. Soit $x, y \in E$. Alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y \rangle + \|y\|^2$$
$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x|y \rangle + \|y\|^2$$
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

4. Identités de polarisation.

Soit E un espace préhilbertien réel, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire de E. Alors $\forall x, y \in E$,

$$\langle x|y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

5. Coordonnées et produit scalaire dans une BON.

Soit E un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E. Soit $x, y \in E$. Alors $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k \rangle e_k$, $\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k \rangle \langle y|e_k \rangle$ et $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k \rangle^2$.

6. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit E un espace préhilbertien réel, $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire de E. Soit $x, y \in E$. Alors

$$\langle x|y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

et il y a égalité si, et seulement si, (x, y) est une famille liée.

7. Définition de l'orthogonal d'une partie.

Soit E un espace préhilbertien réel, $A \subset E$ non vide. On note $A^\perp$ l'orthogonal de A qui est défini par

$$A^\perp = \{x \in E, \ \forall a \in A, \ \langle x|a \rangle = 0\}.$$

8. Orthogonalité et sommes de sev.

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F, G deux sev de E. Alors

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp, \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

De plus, si E est euclidien, alors $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 2 :
Soit $T > 0$. Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues T-périodiques.

Le produit dans $\mathbb{R}$ étant bilinéaire et l'inétgrale étant linéaire, $\langle | \rangle$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ nous donne la symétrie de $\langle | \rangle$.

Soit $f \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors $\langle f|f \rangle = \int_0^T f(t)^2 dt$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit donc que $\langle f|f \rangle \geq 0$. Et enfin, si $\langle f|f \rangle = 0$, alors $\int_0^T f(t)^2 dt = 0$. Par intégrale nulle d'une fonction continue de signe constant, on en déduit donc $\forall t \in [0, T]$, $f(t) = 0$. Mais f est T-périodique. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists t \in [0, T]$ tel que $f(x) = f(t) = 0$ (prendre $t = x - \lfloor x/T \rfloor$). Donc $f = 0$.

Donc $\langle | \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc $\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.