DM 10

Étude d'un endomorphisme de polynômes

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 11 Juin 2024

1. (a) C'est une question de cours.

   Le produit polynomial est bilinéaire et l'intégrale est linéaire, donc $(P, Q) \mapsto \langle P|Q \rangle$ est bilinéaire. La commutativité du produit polynomial donne la symétrie. La positivité de l'intégrale fourni la positivité de ce qui sera bientôt un produit scalaire. Et le caractère définie provient du fait que l'intégrale nulle d'une fonction continue de signe constant entraîne la nullité sur l'intervalle de la fonction. Et un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

   (b) Soit $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Phi(\lambda P + Q, R) = \langle X(\lambda P + Q)|R \rangle = \lambda \langle XP|R \rangle + \langle Q|R \rangle = \lambda\Phi(P, R) + \Phi(Q, R)$$

   Donc Φ est linéaire à gauche.

$$\Phi(P, \lambda Q + R) = \langle XP|\lambda Q + R \rangle = \lambda \langle XP|Q \rangle + \langle XP|R \rangle = \lambda\Phi(P, Q) + \Phi(P, R)$$

   Donc Φ est linéaire à droite. Et donc Φ est bilinéaire.

   Puis

$$\Phi(P, Q) = \langle XP|Q \rangle = \int_{-1}^{1} x\widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt = \langle P|XQ \rangle = \langle XQ|P \rangle = \Phi(Q, P).$$

   Donc Φ est symétrique.

2. On suppose $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E_n)$ tel que $\forall P, Q \in E_n,\ \langle P|\varphi(Q) \rangle = \Phi(P, Q)$.

   (a) Soit $P, Q \in E_n$. Alors

$$\begin{aligned} \langle P|\varphi(Q) - XQ \rangle &= \langle P|\varphi(Q) \rangle - \langle P|XQ \rangle && \text{linéarité à droite} \\ &= \Phi(P, Q) - \Phi(Q, P) && \text{def } \Phi \text{ et } \varphi \\ &= 0 && \Phi \text{ symétrique} \end{aligned}$$

   Donc $\forall Q \in E_n,\ (\forall P \in E_n,\ \varphi(Q) - XQ \perp P)$.

   (b) Soit $Q \in E_n$, $\deg(Q) \leq n - 1$. On a toujours $\varphi(Q) - XQ \in E_n^{\perp}$ d'après la question précédente. En particulier, comme $\varphi \in \mathcal{L}(E_n)$, $\deg(\varphi(Q)) \leq n$ et $\deg(XQ) \leq n$. Donc $\varphi(Q) - XQ \in E_n$. Et donc $(\varphi(Q) - XQ) \perp (\varphi(Q) - XQ)$. Autrement dit, $\|\varphi(Q) - XQ\| = 0$ où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire. Et donc $\varphi(Q) = XQ$.

   (c) On suppose $n = 2$. D'après la question précédente, on a $\varphi(1) = X \times 1 = X$ et $\varphi(X) = X \times X = X^2$. Et $\varphi \in \mathcal{L}(E_2)$, donc $\varphi(X) = aX^2 + bX + c$.

On a toujours $\varphi(X^2) - X^3$ orthogonal à 1, X et X^2. Ce qui s'écrit :

$$\int_{-1}^{1}(at^2+bt+c-t^3)dt = \int_{-1}^{1}(at^3+bt^2-t^4)dt = \int_{-1}^{1}(at^4+bt^3+ct^2-t^5)dt = 0$$

ce qui donne $\frac{a}{3}+c = \frac{b}{3}-\frac{1}{5}+\frac{a}{5}+\frac{c}{3} = 0$. La résolution du système fournit $a=c=0$ et $b=3/5$.
Et donc $\varphi(X^2) = \frac{3}{5}X$.

(d) D'après la question précédente, on a

$$M = \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\det(M-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 3/5 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -\lambda & 3/5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} && \text{dvpmt selon première ligne} \\
&= -\lambda(\lambda^2 - \frac{3}{5}).
\end{aligned}$$

(e) Et donc, par caractérisation de l'inversibilité par le déterminant, $M-\lambda I_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \iff \lambda \in \{0, \sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}\}$.

3. Soit $P, Q \in E_n$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle P|\varphi(Q)\rangle &= \Phi(P,Q) && \text{def } \varphi \\
&= \Phi(Q,P) && \text{symétrie de } \Phi \\
&= \langle Q|\varphi(P)\rangle && \text{def } \varphi \\
&= \langle \varphi(P)|Q\rangle && \text{symétrie du produit scalaire}
\end{aligned}$$

et donc φ est un endomorphisme symétrique de E_n.

4. Soit $(U_0,\ldots,U_n)$ base orthonormale telle que $\forall k \in \{0,\ldots,n\}$, $\exists \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\varphi(U_k) = \alpha_k U_k$.

(a) Soit $P, Q \in E_n$. Comme $(U_0,\ldots,U_n)$ est une BON de E_n, on a $P = \sum_{k=0}^{n} \langle P|U_k\rangle U_k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} \langle Q|U_k\rangle U_k$.
Alors

$$\begin{aligned}
\Phi(P,Q) &= \langle P|\varphi(Q)\rangle && \text{def } \varphi \\
&= \left\langle \sum_{i=0}^{n} \langle P|U_i\rangle U_i \,\middle|\, \sum_{j=0}^{n} \langle Q|U_j\rangle \varphi(U_j) \right\rangle && \text{linéarité } \varphi \\
&= \left\langle \sum_{i=0}^{n} \langle P|U_i\rangle U_i \,\middle|\, \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle Q|U_j\rangle U_j \right\rangle && \varphi(U_k) = \alpha_k U_k \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle P|U_i\rangle \langle Q|U_j\rangle \langle U_i|U_j\rangle && \text{bilinéarité produit scalaire} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle P|U_k\rangle \langle Q|U_k\rangle && (U_0,\ldots,U_n) \text{ BON}
\end{aligned}$$

(b) En reprenant la question précédente avec $P = Q = U_i$, on a

$$\forall i \in \{0,\ldots,n\},\ |\alpha_i| = |\alpha_i \|U_i\|^2|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle U_i | U_k \rangle^1 \right| \\
&= |\Phi(U_i, U_i)| \\
&= \left| \int_{-1}^{1} t\widetilde{U_i}(t)^2 dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |t| \widetilde{U_i}(t)^2 dt \\
&\leq \int_{-1}^{1} \widetilde{U_i}(t)^2 dt && \text{croissance de l'intégrale} \\
&= \|U_i\|^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Supposons $\exists i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $|\alpha_i| = 1$. On a alors que des égalités dans le raisonnement précédent. Et donc, en particulier,

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |t| \widetilde{U_i}(t)^2 dt = \int_{-1}^{1} \widetilde{U_i}(t)^2 dt &\iff \int_{-1}^{1} (|t| - 1)\widetilde{U_i}(t)^2 dt = 0 && \text{linéarité intégrale} \\
&\iff \forall t \in [-1, 1],\ (|t| - 1)\widetilde{U_i}(t)^2 = 0 && \text{intégrale nulle d'une fonction continue de signe constant} \\
&\iff \forall t \in]-1, 1[,\ \widetilde{U_i}(t) = 0 \\
&\iff U_i = 0 && \text{polynôme avec infinité de racines}
\end{aligned}
$$

Mais si $U_i = 0$, alors $(U_0, \dots, U_n)$ ne peut pas être une BON (perte de la norme 1 ou de la liberté). On a donc ☠. Et donc $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $|\alpha_i| \neq 1$.

D'où $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $|\alpha_i| < 1$.

5. On pose $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\gamma_k = \langle U_k | 1 \rangle$.
   (a) Pour$k = 1$, on a $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\langle X | U_i \rangle = \langle \varphi(1) | U_i \rangle = \langle 1 | U_i \rangle = \langle 1 | \alpha_i U_i \rangle = \alpha_i \langle 1 | U_i \rangle = \alpha_i \gamma_i$.

   Supposons $\exists k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\left\langle X^k \middle| U_i \right\rangle = \alpha_i^k \gamma_i$. Alors

$$
\begin{aligned}
\left\langle X^{k+1} \middle| U_i \right\rangle &= \left\langle \varphi(X^k) \middle| U_i \right\rangle \\
&= \left\langle X^k \middle| \varphi(U_i) \right\rangle && \varphi \text{ symétrique} \\
&= \left\langle X^k \middle| \alpha_i U_i \right\rangle && \text{def } U_i \\
&= \alpha_i \left\langle X^k \middle| U_i \right\rangle && \text{linéarité à droite} \\
&= \alpha_i \alpha_i^k \gamma_i && \text{HR} \\
&= \alpha_i^{k+1} \gamma_i
\end{aligned}
$$

   Et donc, par récurrence, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\left\langle X^k \middle| U_i \right\rangle = \alpha_i^k \gamma_i$.

   (b) Soit $P \in E_n$. Alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors,

$$
\begin{aligned}
\langle P | U_i \rangle &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left\langle X^k \middle| U_i \right\rangle && \text{linéarité à gauche} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha_i^k \gamma_i && \text{cf question précédente} \\
&= \gamma_i \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha_i^k \\
&= \gamma_i \widetilde{P}(\alpha_i) && \text{def évaluation}
\end{aligned}
$$

(c) Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. D'après la question précédente, $\gamma_i \widetilde{U_i}(\alpha_i) = \langle U_i | U_i \rangle = 1$. Et donc $\gamma_i \neq 0$ (sinon ☠).

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p+1 = \text{Card}(\{\alpha_i,\ 0 \leq i \leq n\})$. On pose $R_n(X) = \prod_{i=0}^{p}(X - \alpha_i)$.

Par construction, R_n est à racines simples et ses racines sont $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$.

Si $p < n$, alors $\deg(R_n) = p + 1 \leq n$ et donc $R_n \in E_n$. Alors, d'après la question précédente, $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $\langle U_i | R_n \rangle = \gamma_i \widetilde{R_n}(\alpha_i) = 0$.

Or $(U_0, \ldots, U_n)$ est une BON de E_n, donc $R_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \langle R_n | U_k \rangle U_k = 0$. ☠.

Et donc $p \geq n$. Sauf que $p \leq n$ par définition, et donc $p = n$. Et donc les α_i sont deux à deux distincts. Et donc aussi $\deg(R_n) = n + 1$.

(e) On pose

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\},\ L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (X - \alpha_k)$$

Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$. Alors $\deg(L_j) = n$ car $\deg(R_n) = n+1$. Et donc $L_j \in E_n$. Donc $L_j = \sum_{k=0}^{n} \langle L_j | U_k \rangle U_k$. Mais,

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \langle L_j | U_k \rangle = \gamma_k \widetilde{L_j}(\alpha_k)$$

Or $\forall k \neq j$, $\widetilde{L_j}(\alpha_k) = 0$. Donc $L_j = \gamma_j \widetilde{L_j}(\alpha_j) U_j$. Et $\gamma_j \widetilde{L_j}(\alpha_j) \neq 0$. On pose alors $\mu_j = \frac{1}{\gamma_j \widetilde{L_j}(\alpha_j)}$. Alors $U_j = \mu_j L_j$.

U_j étant de norme 1, on a

$$1 = \langle U_j | U_j \rangle = \mu_j \langle U_j | L_j \rangle = \mu_j \gamma_j \widetilde{L_j}(\alpha_j)$$

(ce qui revient à utiliser la définition de μ_j). De plus,

$$\langle 1 | L_j \rangle = \gamma_j \widetilde{L_j}(\alpha_j) \langle 1 | U_j \rangle = \gamma_j^2 \widetilde{L_j}(\alpha_j)$$

d'après le début de la question.

6. (a) On va raisonner par étape.

Si $P = 1 \in E_{2n+1}$. Alors

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t) dt = \int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)^2 dt = \|1\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle 1 | U_k \rangle^2 = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^2 = \sum_{k=0}^{n} \gamma_j^2 \widetilde{P}(\alpha_k)$$

Soit $k \in \{1, \ldots, 2n+1\}$ et $P(X) = X^k$. Alors $k - 1 \in \{0, \ldots, 2n\}$. Alors on peut écrire $k - 1 = p + q$ avec $0 \leq p, q \leq n$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t) dt &= \int_{-1}^{1} t t^p t^q dt \\
&= \Phi(X^p, X^q) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle U_i | X^p \rangle \langle U_i | X^q \rangle && \text{cf } 4 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \alpha_i^p \gamma_i \alpha_i^q \gamma_i && \text{cf } 5b \\
&= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \alpha_i^{p+q+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \alpha_i^{k} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \widetilde{P}(\alpha_i)
\end{aligned}$$

Soit $f : P \mapsto \int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)dt$ et $g : P \mapsto \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \widetilde{P}(\alpha_i)$. Alors f et g sont des formes linéaires sur E_{2n+1} par linéarité de l'évaluation, de l'intégrale, de la somme. Par ailleurs, f et g coïncident sur la base canonique de E_{2n+1}. Donc $f = g$. Et donc

$$\forall P \in E_{2n+1},\ \int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \widetilde{P}(\alpha_i).$$

(b) Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = 2n+2$ tel que $\int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \widetilde{P}(\alpha_i)$.

Alors, par famille de polynôme échelonnée en degré ne contenant pas le polynôme nul, $(1, X, \ldots, X^{2n+1}, P)$ est une base de E_{2n+2}. On a l'égalité entre f et g sur une base de E_{2n+2} et donc $\forall Q \in E_{2n+2}$, $\int_{-1}^{1} \widetilde{Q}(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \widetilde{Q}(\alpha_i)$. En particulier, cette relation est vraie pour R_n^2. donc

$$\int_{-1}^{2} \widetilde{R_n}(t)^2 dt = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \widetilde{R_n}(\alpha_i)^2 = 0$$

Et donc, par nullité de l'intégrale d'une fonction continue de signe constant, $R_n = 0$ (avec un nombre infini de racines). ☠. Et donc il ne peut pas exister de polynôme de degré $2n+2$ vérifiant la relation précédente.

7. (a) Soit $P \in E_n$. Alors $PE_n \in E_{2n+1}$. Donc

$$\langle P | R_n \rangle = \int_{-1}^{1} \widetilde{PR_n}(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \widetilde{P}(\alpha_i)\widetilde{R_n}(\alpha_i) = 0$$

(b) D'après la question précédente, $\forall P \in E_n$, $P \perp R_n$. Et donc $R_n \in E_n^{\perp}$. Or $R_n \in E_{n+1}$. Donc R_n est dans l'orthogonal de E_n dans E_{n+1}. Or $E_n^{\perp}$ est un (le) supplémentaire (orthogonal) de E_n dans E_{n+1}. Et donc $\dim(E_n^{\perp}) = \dim(E_{n+1}) - \dim(E_n) = 1$.

Soit V_n un polynôme de degré $n+1$ unitaire et $V_n \in E_n^{\perp}$. Alors $V_n \in \mathrm{Vect}(R_n)$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $V_n = \lambda R_n$. Or R_n et V_n sont tous deux de coefficient dominant 1, donc $V_n = R_n$.

Et donc R_n est le seul polynôme de degré $n+1$ de coefficient dominant 1 et tel que $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\int_{-1}^{1} t^k \widetilde{R_n}(t)dt = 0$. Chacune de ces équations est une équation linéaire en les coefficients de R_n. On a donc un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnue.

(c) D'après le début de la question, $\forall P \in E_n$, $\int_{-1}^{1} \widetilde{P}(-t)\widetilde{R_n}(t)dt = 0$. En effectuant le changement de variable linéaire $u = -t$ ($t \mapsto -t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ de dérivée $t \mapsto -1$), on a

$$\int_{1}^{-1} \widetilde{P}(u)\widetilde{R_n}(-u)(-du) = 0$$

Alors $R_n(-X) \in E_n^{\perp}$. Et donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_n(-X) = \lambda R_n(X)$. R_n est de coefficient dominant 1 et $R_n(-X)$ de coefficient dominant $(-1)^{n+1}$, donc $R_n(-X) = (-1)^{n+1} R_n(X)$.

(d) Exemple : on prend $n = 2$. On a $R_2(-X) = -R_2(X)$. Donc R_2 est impair. Donc $R_2(X) = X^3 + cX$.

Et $0 = \langle R_n | X \rangle = \int_{-1}^{1} (t^4 + ct^2)dt = \frac{1}{5} + c/3$. Et donc $R_2(X) = X^3 - \frac{3}{5}X = X(X^2 - 3/2) = X(X - \sqrt{3/5})(X + \sqrt{3/5})$. Et donc $\alpha_0 = -\sqrt{3/5}$, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \sqrt{3/5}$.

Alors $L_0(X) = X^2 - X\sqrt{3/5}$, $L_1(X) = X^2 - 3/5$ et $L_2 = X^2 + X\sqrt{3/5}$.

Puis, $\gamma_0^2 = \frac{\langle 1 | L_0 \rangle}{\widetilde{L_0}(\alpha_0)} = 5/9$, $\gamma_1^2 = \frac{\langle 1 | L_1 \rangle}{\widetilde{L_1}(\alpha_1)} = 8/9$ et $\gamma_2^2 = \frac{\langle 1 | L_2 \rangle}{\widetilde{L_2}(\alpha_2)} = 5/9$.