Chapitre 30 - TD :
Variables Aléatoires

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

18 juin 2024

1 Lois de variables aléatoires

Exercice 1 :
Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0,1[$. Pour quelles valeurs de k, la probabilité $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ est-elle maximale ?

Exercice 2 :
Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$. On note

$$b(k,n,p) = \mathbb{P}(X = k)$$

1. Pour quelle valeur m de k, le coefficient $b(k,n,p)$ est-il maximal ?
2. Étudier la monotonie de la fonction $f : x \mapsto x^m(1-x)^{n-m}$ sur $[0,1]$.
3. Vérifier que si $m \in [np, (n+1)p]$, alors

$$b\left(m, n, \frac{m}{n+1}\right) \leq b(m,n,p) \leq b\left(m, n, \frac{m}{n}\right)$$

4. Proposer un encadrement analogue pour $m \in [(n+1)p - 1, np]$
5. Donner un équivalent simple de $b(m,n,p)$ quand $n \to +\infty$. On rappel $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

Exercice 3 :
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p
Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

2 Indépendance de variables aléatoire

Exercice 4 :
Soit X, Y deux variables aléatoires finies sur Ω. On suppose

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = x)$$

Montrer que X et Y sont indépendantes

Exercice 5 :
Montrer que deux événements A et B sont indépendants ssi leurs fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ définissent des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 6 :
Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de taille n et m et de même paramètre p. Peut-on identifier la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$?

Exercice 7 :
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Les variables $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs $a_1, \dots, a_n$ avec

$$\mathbb{P}(X = a_i) = \mathbb{P}(Y = a_i) = p_i$$

Montrer que

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)$$

Exercice 9 :
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et f une application définie sur $X(\Omega)$.
À quelle condition les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

3 Loi conjointe, loi marginale

Exercice 10 :
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On donne la loi de la variable aléatoire conjointe $Z = (X, Y)$:

$X\backslash Y$	-1	0	1
-1	$1/12$	$1/3$	$1/12$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$

1. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. Déterminer les lois marginales. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer les lois de $X + Y$ et XY.

Exercice 11 :
Le tableau ci-dessous donne la loi conjointe d'un couple de variables aléatoire (X, Y) avec X et Y à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0	$1/9$	$2/9$
2	$2/9$	0	$1/9$
3	$1/9$	$2/9$	0

1. Calculer la probabilité que X et Y soient égales.

2. Déterminer les lois marginales. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 (Les chats de Sophie) :
Charles ne supporte pas les chats et Sophie déteste les chiens. Charles n'élève pas plus d'un chien et Sophie pas plus d'un chat. La probabilité pour que Charles ait un chien est de $0,2$. Si Charles n'a pas de chien, la probabilité pour que Sophie ait un chat est de $0,1$. On note X le nombre de chiens de Charles, Y le nombre de chats de Sophie et Z le nombre d'animaux du couple.

1. Calculer la probabilités pour qu'ils n'aient pas d'animaux.
2. On suppose de plus que $\mathbb{P}(Z = 1) = 0.1$. Calculer $\mathbb{P}(Z = 2)$.
3. Déterminer la loi conjointe (X, Y). Quelle est la loi de Y ?
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 13 :
Dans une pile de n ($n \geq 2$) feuilles dactylographiées, se trouvent les deux lettres que l'on doit envoyer. On enlève une par une les feuilles du paquet jusqu'à ce que l'une des lettres à envoyer se trouve sur le dessus du paquet. On note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de feuilles enlevées. On recommence l'opération jusqu'à trouver la deuxième lettre et on note X_2 la variable aléatoire donnant le nombre de feuilles qu'il a fallu retirer du paquet après avoir trouvé la première lettre et avant que la deuxième lettre soit sur le dessus du paquet. Sans information supplémentaire, on peut supposer que toutes les positions possibles pour les deux lettres sont équiprobables.

1. Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles pour cette expérience aléatoire et la probabilités $\mathbb{P}$ sur Ω.
2. Déterminer la loi conjointe (X_1, X_2), puis les lois marginales.
3. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.
4. On note $Z = X_1 + X_2 + 2$. Que représente la variable aléatoire Z ? Déterminer sa loi.

4 Espérance, variances

Exercice 14 :
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$. Établir

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k)$$

Exercice 15 :
On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p indépendamment des autres. On dispose de deux protocoles :

Protocole 1 : On analyse le sang de chacun des N individus.

et

Protocole 2 : On regroupe les individus par groupe de n (avec $n|N$). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positif dans le protocole 2.

2. soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées dans le protocole 2. Exprimer l'espérance de Y en fonction de n, N et p.

3. Comparer les deux protocoles pour les valeurs $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.

Exercice 16 :
On supposera toutes les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On appelle fonction caractéristiques d'une variable aléatoire X l'application $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iuX})$$

1. Vérifier que φ_X est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$
2. Calculer $\varphi_X(0)$. Comment interpréter $\varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$?
3. Calculer la fonction caractéristique d'une variable X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p
4. Même question pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
5. Soit X une variable aléatoire et $x_0 \in \mathbb{Z}$. Vérifier

$$\mathbb{P}(X = x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(u) e^{-iux_0} du$$

En déduire

$$\varphi_X = \varphi_Y \implies X = Y$$

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Vérifier

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$$

7. Exploiter ce résultat pour retrouver ka fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Exercice 17 :
Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$$

1. Calculer l'espérance de X_k
2. On pose $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$. En calculant de deux façons l'espérance de Y_n, déterminer $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$
3. Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$?

Exercice 18 :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

1. Exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \geq k)$.
2. On suppose X et Y uniformes. Déterminer l'espérance de $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$ puis celle de $|X - Y|$.

Exercice 19 :
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = a\binom{n}{k}$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 20 :
Soit X une variable aléatoire avec $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X+1}$

Exercice 21 :
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.

1. On pose

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$

2. On pose

$$V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

Calculer l'espérance de V_n.

Exercice 22 (Loi de deux dés) :
On lance deux dés équilibrés et on note U_1 et U_2 les variables aléatoires des deux faces obtenues pour les deux dés. On note $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi et l'espérance de X.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 23 :
Soit X et Y deux variables aléatoires suivant une loi $\mathcal{B}(p)$.

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
2. On suppose X et Y indépendantes. Déterminer les lois de $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
3. Déterminer la loi conjointe de U et V. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 24 :
Soit $p \in [0, 1]$, $X, Y \sim \mathcal{B}(p)$. On pose $\lambda = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$.

1. Que vaut λ lorsque $X = Y$? Lorsque X et Y sont indépendantes ?
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
3. Montrer que $\max(0, 2p - 1) \leq \lambda \leq p$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ en fonction de p et λ.
5. Toujours en fonction de λ et p, déterminer l'espérance et la variance de $X + Y$ et $X - Y$.

5 Inégalité de Markov, Bienaymé-Tchebychev

Exercice 25 :
Soit X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante. Montrer que

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(g(|X|))}{g(a)}$$

Exercice 26 :
Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Exercice 27 :
Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $\forall \lambda, \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X - np \geq n\varepsilon) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda(X-np-n\varepsilon)})$$

Exercice 28 :
Une population de personne présente un propriété donnée avec un proportion inconnue $p \in]0,1[$.

On choisit un échantillon n de personnes et on pose $X_i = 1$ su le i-ème individu présente la propriété étudiée et $X_i = 0$ sinon. On considère que les variables X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Quelle est la loi suivie par
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$
2. Déterminer espérance et variance de S_n/n
3. soit $\varepsilon > 0$. Établir
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

4. Pour $\varepsilon = 0.05$, quelle valeur de n choisir pour que S_n/n soit voisin de p à ε près avec une probabilité supérieure à 95%.

Exercice 29 :
Soit X_n une variable aléatoire avec $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir

$$\mathbb{P}(X_n \leq k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 30 :
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer que

$$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Exercice 31 :
Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. En introduisant la variable aléatoire

$$Y = \Big(\alpha(X-\mu) + \sigma\Big)^2$$

Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \frac{1}{1+\alpha^2}$$

6 Exercices hors normes

Exercice 32 (Matrices aléatoires) :
On considère des matrices aléatoires de $\mathcal{M}_2(\{-1,1\})$. Calculer l'espérance de $\det(M)^2$.

Exercice 33 (Matrices avec variables aléatoires) :
Ω un espace probabilisé fini. Soit X,Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω telles que $X,Y \sim \mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On fabrique alors une matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X & 0 & 1 \\ Y & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'espérance de la nouvelle variable aléatoire $Z = \det(M)$.