DM 11

Règle de Raabe-Duhamel

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

9 juin 2024

Partie A : Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\lambda}{n} + o(1/n).$$

1. On suppose $\lambda < 0$.
   (a) Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\lambda}{n} + o(1/n)$, on a donc, par définition,

   $$n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Donc, par définition de la convergence, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\left|n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{\lambda}{n}\right)\right| \leq |\lambda| = -\lambda$. En particulier, $\forall n \geq n_0$, $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{\lambda}{n}\right) \geq \lambda$. Et donc

   $$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} = 1.$$

   (b) La suite (u_n) est donc une suite croissante à partir du rang n_0. Par théorème de la limite monotone, elle ne peut donc pas converger vers 0. Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Alors

   $$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} \\ &= (1+1/n)^{-\beta} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o(1/n).\end{aligned}$$

   Donc,

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\beta-\lambda}{n} + o(1/n).$$

   On pose alors $\mu = \beta - \lambda \in \mathbb{R}$ indépendant de n et

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\mu}{n} + o(1/n).$$

3. On suppose $\lambda > 1$. Soit $\beta \in]1, \lambda[$.

(a) D'après la question précédente, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\beta-\lambda}{n} + o(1/n).$$

Alors $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta-\lambda < 0$. Donc, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \leq 0$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, donc,

$$\forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(b) D'après la question précédente, on a également, $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$. Donc la suite (u_n/v_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs (car $u_n > 0$ et $v_n > 0$). Elle est donc décroissante et minorée. Donc, par théorème de la limite monotone, la suite (u_n/v_n) converge.

Par conséquent, la suite (u_n/v_n) est bornée. Elle est donc en particulier majorée (et même mieux, le théorème de la limite monotone nous assure l'existence du maximum de la suite, mais on a pas besoin d'être aussi précis ici). Soit $K \geq 0$ un majorant de la suite (u_n/v_n). Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n/v_n \leq K$. Donc en particulier, $\forall n \geq N$, $u_n \leq Kv_n$.

Autre méthode, plus constructive : On a $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$. Donc la suite (u_n/v_n) est décroissante à partir du rang N. Donc, par une récurrence facile (qu'il faudrait faire), $\forall n \geq N$, $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_N}{v_N}$. On pose alors $K = \frac{u_N}{v_N} \in \mathbb{R}_+$ indépendant de n et $\forall n \geq N$, $u_n \leq Kv_n$.

(c) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ avec $\beta \in]1, \lambda[$. Comme $\beta > 1$, par la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\beta}$ est une série à termes positifs convergente.

Autrement dit, $\sum v_n$ est une série à termes positifs convergente. Or $\sum u_n$ est aussi une série à termes positifs et $\forall n \geq N$, $u_n \leq Kv_n$. Donc, par comparaison de SATP (séries à termes positifs), $\sum u_n$ converge.

4. On suppose $0 \leq \lambda < 1$. Soit $\beta \in]\lambda, 1[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Toujours d'après la question 2, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\beta-\lambda}{n} + o(1/n).$$

On en déduit donc $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ car $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta-\lambda > 0$. Donc $\exists K \geq 0$ tel que $\forall N \geq N$, $u_n \geq Kv_n$ (prendre $K = \frac{u_N}{v_N}$). Or $\sum v_n$ est une série de Riemann divergente car $\beta < 1$. Et donc $\sum u_n$ diverge par comparaison de SATP.

5. On pose, $\forall n \geq 2$, $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n\ln(n)^2}$. La série $\sum x_n$ est une série de Riemann divergente (c'est même la série harmonique). Et $\sum y_n$ est une série de Bertrand convergente.

Mais

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o(1/n)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{(n+1)\ln(n+1)^2}{n\ln(n)^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right)\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right)\left(1 + \frac{1}{n\ln(n)} + o(\frac{1}{n\ln(n)})\right)^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right)\left(1 + \frac{2}{n\ln(n)} + o(\frac{1}{n\ln(n)})\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o(1/n).
\end{aligned}$$

Donc les deux séries sont dans le cas $\lambda = 1$ de la règle de Raabe-Duhamel et l'une est convergente alors que l'autre est divergente. Donc le cas $\lambda = 1$ de la règle de Raabe-Duhamel ne permet pas de pouvoir conclure sur la nature de la série.

Partie B : Applications de Raabe-Duhamel

6. On pose, $\forall n \geq 2$, $w_n = \sqrt{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

   Comme $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \in [0,1[\subset [0,\pi/2]$, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sin(1/\sqrt{k}) \geq 0$. Et donc la suite (w_n) est une suite de réels strictement positifs.

   Et

$$\begin{aligned}
\frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n-1)!}} \frac{\prod_{k=1}^{n} \sin(1/\sqrt{k})}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin(1/\sqrt{k})} \\
&= \sqrt{n}\sin(1/\sqrt{n}) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n\sqrt{n}} + o(1/n^{3/2})\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{6n} + o(1/n).
\end{aligned}$$

   Comme $1/6 \in [0,1[$, d'après la question 4 de la partie précédente, la série $\sum w_n$ diverge.

7. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{1}{(1+t^4)^n} \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ donc la suite (I_n) est bien définie.

   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $\frac{1}{(1+t^4)^n} \geq 0$. Donc, par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$. D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $(1+t^4)^n \leq (1+t^4)^{n+1}$. Donc, par croissance de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq I_{n+1}$. Donc la suite (I_n) est décroissante. Or elle est minorée par 0. Donc, par théorème de la limite monotone, (I_n) est convergente et donc, elle est bornée.

   On vient de voir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I_{n_0} = 0$. Alors, par intégrale nulle d'une fonction de signe constant, on en déduit $\forall t \in [0,1]$, $\frac{1}{(1+t^4)^{n_0}} = 0$. Ce qui est absurde. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \neq 0$. Et donc par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n > 0$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $t \mapsto t \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $t \mapsto \frac{1}{(1+t^4)^n} \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \overbrace{1}^{\downarrow} \times \underbrace{\frac{1}{(1+t^4)^n}}_{\downarrow} dt \\
&= \left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_0^1 - \int_0^1 t \times \frac{-4nt^3}{(1+t^4)^{n+1}} dt \\
&= \frac{1}{2^n} + 4n\int_0^1 \frac{t^4+1-1}{(1+t^4)^{n+1}} dt \\
&= \frac{1}{2^n} + 4n\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+t^4)^n} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^4)^{n+1}} dt\right) && \text{linéarité intégrale} \\
&= \frac{1}{2^n} + 4n(I_n - I_{n+1}).
\end{aligned}$$

   (c) D'après la question précédente, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4nI_{n+1} = \frac{1}{2^n} + (4n-1)I_n \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{1}{2^{n+2}nI_n} + 1 - \frac{1}{4n}.$$

   Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}} dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{t^4}{2^{n+1}} dt && \text{croissance de l'intégrale}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5 \times 2^{n+1}}.$$

Et donc, d'après la relation de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq \frac{1}{2^n} + \frac{2n}{5 \times 2^n}$. D'où $2^n I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par branche infini du théorème des gendarmes. On en déduit donc $\frac{1}{2^n I_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par passage à l'inverse et donc $\frac{1}{2^n I_n} \underset{n \to +\infty}{=} o(1)$ et donc $\frac{1}{2^{n+2} n I_n} \underset{n \to +\infty}{=} o(1/n)$.

On a donc

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{1}{4n} + o(1/n).$$

Or $1/4 < 1$, donc, d'après la question 4, la règle de Raabe-Duhamel nous donne la divergence de la série $\sum I_n$.

8. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On pose

$$a_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \; a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k).$$

(a) Comme $\alpha \notin \mathbb{N}$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha - k \neq 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \; \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n!}{(n+1)!} \left| \frac{\prod_{k=0}^{n} (\alpha - k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)} \right| \\ &= \frac{|\alpha - n|}{n+1} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \forall n \geq \lfloor \alpha \rfloor + 1, \; \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{n - \alpha}{n+1} \\ &= \frac{1 - \alpha/n}{1 + 1/n} \\ &\underset{n \to +\infty}{=} (1 - \alpha/n)(1 - 1/n + o(1/n)) \\ &\underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha + 1}{n} + o(1/n). \end{aligned}$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel (et plus précisément la question 3), $\sum a_n$ converge absolument si et seulement si $\sum |a_n|$ converge, si et seulement si $\alpha + 1 > 1$ (car $\alpha \notin \mathbb{N}$) si et seulement si $\alpha > 0$ (le cas $\alpha = 0$ non décidable de Raabe-Duhamel ne peut se produire donc on a soit convergence, soit divergence assurée).

(b) On suppose $\alpha < -1$. On a alors en particulier

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}*, \; a_{2n} &= \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=0}^{2n-1} (\alpha - k) \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \prod_{k=0}^{2n-1} (k - \alpha) \\ &> \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=0}^{2n-1} (k+1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $a_{2n} \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$ et donc, $a_n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Donc la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

(c) On suppose $-1 < \alpha < 0$.

i. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(k-\alpha).$$

Mais $\forall k \in \mathbb{N}$, $k - \alpha > k + 1 > 0$. Donc

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(|a_n|) &= \ln\left(\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(k-\alpha)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{k-\alpha}{l+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{1-\alpha/k}{1+1/k}\right).\end{aligned}$$

On se ramène donc à étudier la série $\sum \ln\left(\frac{1-\alpha/n}{1+1/n}\right)$.

Or

$$\frac{1-\alpha/n}{1+1/n} \underset{n\to+\infty}{=} (1-\alpha/n)(1-1/n+o(1/n)) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o(1/n).$$

Donc

$$\ln\left(\frac{1-\alpha/n}{1+1/n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\alpha+1}{n}.$$

Or $\sum 1/n$ est une SATP divergente (série de Riemann ou série harmonique) et donc $\sum \ln(\frac{1-\alpha/n}{1+1/n})$ est une série à termes négatifs divergente, par comparaisons de séries à termes de signes constants (négatifs).

Comme $\sum \ln(\frac{1-\alpha/n}{1+1/n})$ est une série à termes négatifs, par théorème de la limite monotone, elle est soit convergente de sommes strictement négative, soit elle diverge vers $-\infty$. Or elle ne converge pas, donc

$$\ln(|a_n|) = \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{1-\alpha/n}{1+1/n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

ii. D'après la question précédente et par caractérisation séquentielles des limites, on a $|a_n| = e^{\ln(|a_n|)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors, par théorème des gendarmes,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Et

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n+2} - S_{2n} &= a_{2n+2} + a_{2n+1}\\ &= \frac{1}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{2n}(\alpha-k)\left(\frac{\alpha-2n-1}{2n+2}+1\right)\\ &= \frac{1}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{2n}(\alpha-k)\frac{\alpha+1}{2n+2}\\ &= \frac{\alpha+1}{(2n+2)!}\prod_{k=0}^{2n}(k-\alpha)\\ &\geq 0. && \text{car } \alpha > -1\end{aligned}$$

Donc la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Et aussi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+3} + a_{2n+2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^{2n+1} (\alpha - k) \left(\frac{\alpha - 2n - 2}{2n+3} + 1 \right) \\ &= \frac{-(\alpha+1)}{(2n+3)!} \prod_{k=0}^{2n+1} (k - \alpha) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Or $S_{2n+1} - S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et de même limites.

Donc la suite (S_n) admet deux sous suites convergentes de même limite qui recouvrent la suite (S_n) entier. Donc la suite (S_n) est convergente et de mêle limite que (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

Donc, par définition, la série $\sum a_n$ est convergente (la suite des sommes partielles converge).