DM 12
Dénombrement

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 25 Juin 2024

Problème 1 (Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$) :
Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. c'est une numérotation des éléments de E.

1. Montrer que les ensembles $\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P} = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ sont dénombrables.
2. Dans cette question, on montre que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. On introduit la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \{0, \ldots, 5\}$.
   (b) Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
   (c) Établir que φ est bijective.
3. Dans cette question, on montre la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$. On introduit la fonction $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \psi(p,q) = 2^p(2q+1)$$
   (a) Montrer que ψ est bien définie.
   (b) Montrer que ψ est injective.
   (c) En admettant (pour le moment) que pour tout entier, il existe une plus grande puissance de 2 qui le divise, montrer que ψ est surjective.
   (d) Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable et que $\mathbb{Z}^2$ l'est également.
4. Dans cette question, on montre la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$.
   (a) Donner une injection simple de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.
   (b) On considère l'application $\zeta : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ définie par $\zeta(r) = (p,q)$ où p/q est l'écriture de r sous forme d'une fraction irréductible. ζ est-elle injective ? Surjective ?
   (c) Exhiber une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

On vient donc de fabriquer une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$ et une autre de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Le théorème de Cantor-Bernstein permet alors de conclure à l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ et donc à la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$.

Problème 2 (Nombre de partitions d'un ensemble) :
Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que $\{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E en k classes si :

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E \quad ; \quad \forall i \in \{1, \dots, k\},\ A_i \neq \emptyset \quad ; \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\},\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Partie I : Nombres de partitions

Si $n \in \mathbb{N}$, on notera $r(n)$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On conviendra que $r(0) = 1$.
Soit E un ensemble non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $r(n, k)$ le nombre de partitions de E en partition en k classes.

1. En faisant la liste des partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$, déterminer $r(n)$ pour $n \in \{1, 2, 3\}$.
2. Montrer que $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, $k > n \implies r(n, k) = 0$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r(n) = \sum_{k=1}^{n} r(n, k)$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r(n + 1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r(k)$.
5. Calculer $r(4)$, $r(5)$ et $r(6)$.
6. Montrer que $\forall n \geq 5$, $r(n) \geq 2^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $r(n) \leq n^n$.
7. Si $n, k \in \mathbb{N}$, on note $S(n, k)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à k éléments.
   Montrer que : $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, $S(n, k) = k! r(n, k)$.

Partie II : Nombres de partitions de classes paires

Soit E un ensemble non vide de cardinal $2m$ avec $m \geq 1$.
On note a_m le nombre de partitions de E en m classes qui sont toutes des paires (*i.e.* le nombre de partitions en sous-ensembles tous de cardinal 2).

8. Déterminer a_1, a_2 et a_3. On conviendra que $a_0 = 1$.
9. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $a_m = (2m - 1) a_{m-1}$.
10. En déduire que $\forall m \in \mathbb{N}$, $a_m = \frac{(2m)!}{2^m m!}$.

Partie III : Nombres d'involutions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en classes qui sont des paires ou des singletons (donc des sous-ensembles qui sont de cardinal 2 ou 1).
Soit E un ensemble non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4.
12. On suppose $n = 2m$, $m \geq 1$. Montrer que $b_{2m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} a_{m-k}$.
    Indic : *Classer les partitions suivant le nombre de singletons qu'elles contiennent.*
13. Montrer que $\forall n \geq 3$, $b_n = b_{n-1} + (n - 1) b_{n-2}$.
14. Calculer b_5 et b_6.
15. Calculer le nombre d'involutions dans un ensemble à 10 éléments.