Chapitre 31
Fonctions de deux variables

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

25 juin 2024

Table des matières

Le but de ce chapitre est de donner une intuition, de donner les prémices de l'analyse à plusieurs variables. Ce chapitre ne sera donc pas complet. Il sera complété et généralisé en deuxième année. En particulier, la notion de continuité n'est pas l'objectif du programme et donc sera survolée. On se contentera, par exemple, de fonctions de deux variables et à valeurs réelles. Ce qui sera généralisé par des fonctions vectorielles en deuxième année (donc à valeur dans un espace vectoriel).

1 Topologie de $\mathbb{R}^2$

On rappelle que $\mathbb{R}^2$ peut être muni de sa structure euclidienne canonique. On note donc, pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

1.1 Boule ouverte

Définition 1.1 (Boule ouverte de centre a et rayon r) :
On muni $\mathbb{R}^2$ de sa structure canonique. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.
On note $\mathcal{B}(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2,\ \|x - a\| < r\}.$$

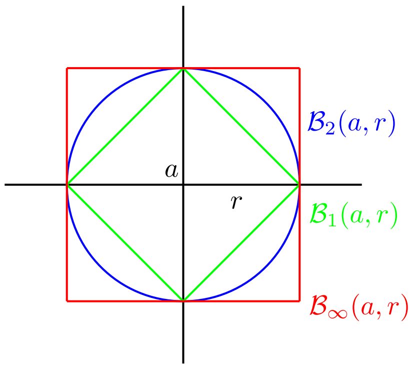
Définition 1.2 (Boule fermée de centre a et de rayon r) :
On muni $\mathbb{R}^2$ de sa structure canonique. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$.
On note $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r :

$$\overline{\mathcal{B}}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2,\ \|x - a\| \leq r\}.$$

Remarque :
On notera que $\mathcal{B}(a, 0) = \emptyset$ et $\mathcal{B}(a, 0) = \{a\}$.

Remarque (Autres normes de $\mathbb{R}^2$) :
On peut définir deux autres normes "classiques" sur $\mathbb{R}^2$: la norme 1 et la norme ∞ par $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$ et $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$. On obtient alors des boules différentes pour ces deux autres normes.

On notera que les notions de topologie (ouverts, fermés, continuité etc) qui vont suivre, ne dépendent pas de la topologie utilisé, et donc du choix de la norme sur $\mathbb{R}^2$. En effet, sur $\mathbb{R}^2$ les normes sont dites équivalentes, c'est-à-dire qu'on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_\infty$ et $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$. Donc, quitte à diviser (ou multiplier) par un coefficient 2 ou $\sqrt{2}$, on peut passer de la boule ouverte pour la norme 2, à la boule ouverte pour la norme ∞ ou encore à la boule ouverte pour la norme 1.



1.2 Topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.3 (Point intérieur à un ensemble) :
On muni $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $a \in A$.
On dit que a est un point intérieur de A si $\exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset A$.

Définition 1.4 (Ouvert de $\mathbb{R}^2$) :
On muni $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$.
On dit que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (pour la topologie induite par la norme 2), si tout point de A est intérieur à A, *i.e.*

$$\forall a \in A,\ \exists r > 0,\ \mathcal{B}(a, r) \subset A.$$

Définition 1.5 (Fermé de $\mathbb{R}^2$) :
Soit $A \subset \mathbb{R}^2$.
On dit que A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ si $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Remarque :
Autrement dit, $A \subset \mathbb{R}^2$ est fermé si $\forall x \notin A$, $\exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \cap A = \emptyset$.

Exemple 1.1 :
L'ensemble $]0, 1[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, si $a = (a_1, a_2) \in]0, 1[^2$, alors en prenant $r = \sqrt{\min(a_1, 1 - a_1, a_2, 1 - a_2)}/2$, $r > 0$ et $\mathcal{B}(a, r) \subset]0, 1[^2$. En effet, si $x \in \mathcal{B}(a, r)$, alors $\|a - x\|^2 \leq r$ donc $(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 < r^2$. En particulier, $|a_1 - x_1| < r$ et $|a_2 - x_2| < r$. Donc $x_1 \in]a_1 - r, a_1 + r[\subset]0, 1[$ et de même, $x_2 \in]0, 1[$. Donc $x \in]0, 1[^2$.

Remarque :
Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés. Il existe même des ensembles qui sont à la fois ouvert et fermé (on appelle ces ensembles des *clopen*).

Dans $\mathbb{R}$, $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé. Dans $\mathbb{R}^2$, $[0, 1[^2$ est également ni ouvert, ni fermé. En effet, $(0, 0) \in [0, 1[^2$ mais $\forall r > 0$, $\mathcal{B}(0, r) \not\subset [0, 1[^2$ car $(-\sqrt{r}/2, 0) \in \mathcal{B}(0, r)$ et $(-\sqrt{r}/2, 0) \notin [0, 1[^2$. Donc $[0, 1[^2$ n'est pas ouvert. Et de la même manière, $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 1[^2$ n'est pas ouvert à cause du point $(1, 1)$. Donc $[0, 1[^2$ n'est pas fermé.

Proposition 1.1 (Premiers ouverts) :
On a

(i) $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
(ii) Une boule ouverte est un ouvert.
(iii) Une boule fermée est un fermé.
(iv) Un singleton de $\mathbb{R}^2$ est fermé.

Proposition 1.2 (Topologie et relations ensemblistes) :
On a

(i) Toute réunion *quelconque* d'ouverts est un ouvert.
(ii) Toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.
(iii) Toute réunion **finie** de fermés est un fermé.
(iv) Toute intersection quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration :

(i) Soit I un ensemble (quelconque) et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^2$. On pose $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Soit $x \in U$. Alors $\exists j \in I$ tel que $x \in U_j$, par définition de la réunion. Comme U_j est un ouvert, $\exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subset U_j$. Alors $\mathcal{B}(x,r) \subset U$. Et donc, par définition, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(U_1,\dots,U_n)$ une famille de n ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit $x \in U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Alors, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $x \in U_i$. Donc, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\exists r_i > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r_i) \subset U_i$. On pose alors $r = \min(r_1,\dots,r_n)$. Alors $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\mathcal{B}(x,r) \subset \mathcal{B}(x,r_i) \subset U_i$. Et donc $\mathcal{B}(x,r) \subset U$. Donc U est un ouvert.
(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1,\dots,F_n)$ des fermés de $\mathbb{R}^2$. On pose $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$. On pose également $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $U_i = \mathbb{R}^2 \setminus F_i$. Alors les U_i sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Puis,
$$F = \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcup_{i=1}^n (\mathbb{R}^2 \setminus U_i) = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right)$$
Donc F est le complémentaire d'un ouvert et donc c'est un fermé.
(iv) On raisonne de la même manière.

□

2 Continuité d'une fonction de deux variables

2.1 Fonction de deux variables

Définition 2.1 (Fonction de deux variable à valeur réelle) :
Une fonction de deux variables à valeur réelle est une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ où $A \subset \mathbb{R}^2$. Comme toute fonction, elle est donc définie par un ensemble de départ qui est sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, un ensemble d'arrivée inclut dans $\mathbb{R}$ et son expression.

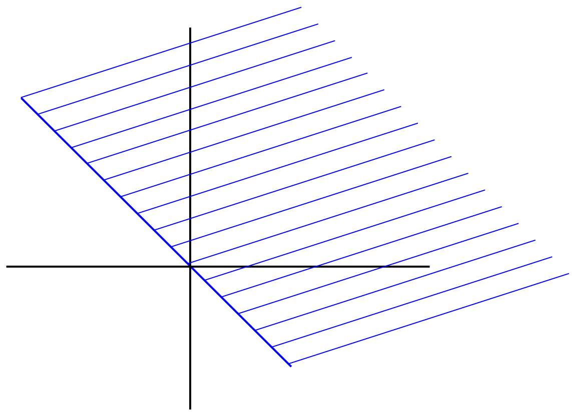
L'ensemble de définition d'une fonction de deux variables correspond au sous-ensemble de tous les couples de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels l'expression de la fonction est bien définie.

Exemple 2.1 :

On considère l'application $f : (x,y) \mapsto \frac{\ln(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Alors f est définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y>0\}$.
On peut considérer aussi

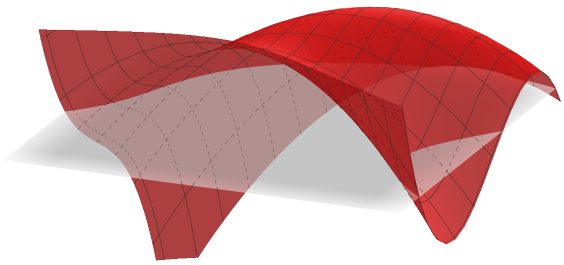
$$g : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\ln(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}$$

g est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ mais le domaine de définition est le même que f.



Définition 2.2 (Graphe d'une fonction de deux variables) :
Le graphe d'une fonction de deux variables est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ qui est identifier à $\mathbb{R}^3$. Par définition, si $A \subset \mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in A\}$.

Le graphe d'une fonction de deux variables est donc une sorte de nappe de l'espace. Le plan horizontale correspond au domaine de définition de la fonction f et en chaque point de ce plan, la fonction f donne une "altitude" au dessus.



Définition 2.3 (Fonctions partielles) :
Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

En tout point $(a, b) \in A$, on peut associer deux fonctions partielles : $f_{2,a} : y \mapsto f(a, y)$ et $f_{1,b} : x \mapsto f(x, b)$. Pour $f_{2,a}$, la première coordonnée est fixée et est donc un paramètre. Pour $f_{1,b}$, c'est la deuxième coordonnée qui est fixée et qui devient le paramètre.

Remarque :
Les fonctions partielles sont des fonctions d'une variable réelles à valeur réelle. On peut donc les étudier en utilisant tout ce qui a été vu dans les chapitres d'analyse précédents.

2.2 Continuité

Dans tous le cours, pour simplifier les choses, on considère les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Il n'y a donc pas de problème "au bord", avec des sens de déplacement qui serait tronqués. En tous les points, on peut se déplacer dans toutes les directions (du plan) sans "sortir" du cadre.

On pourrait évidemment généraliser l'étude à des ensembles de définition quelconque, donc avec des bords éventuels. Mais ce n'est pas l'objectif du programme. Le but est de fournir une première approche un peu simpliste pour se familiariser avec les problématiques des fonctions de plusieurs variables en vu d'une généralisation plus facile l'année prochaine.

Définition 2.4 (Limite d'une fonction de deux variables) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \overline{U}$ un point dans l'adhérence de U. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

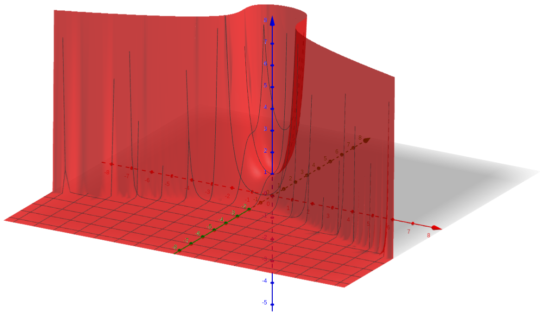
On dit que f tend vers ℓ en M_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in U,\ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leq \eta \implies |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.1 :
Les même propriétés sur les limites pour les fonctions d'une variables réelle s'appliquent encore pour les limites de fonctions de deux variables.

!!! ATTENTION !!!

⚠ La notion de limite en l'infini n'a pas vraiment de sens pour des fonctions plusieurs. Le problème vient du fait qu'il y a une notion d'infini par direction du plan. Autrement dit, il existe une infinité d'infini possible.



Définition 2.5 (Continuité en un point) :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in U$.
f est dit continue en M_0 si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Proposition 2.2 (Propriétés des fonctions continues) :
On a les propriétés de bases suivantes sur les fonctions continues :

(i) L'ensemble des fonctions continues en (x_0, y_0) est stable par addition et produit.

(ii) Si f et g sont continue en (x_0, y_0) et $g(x_0, y_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0).

Proposition 2.3 (Continuité des polynômes et fractions rationnelles) :
Les fonctions polynomiales en x et y sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et les fractions rationnelles en x et y sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 2.4 (Continuité et fonctions partielles) :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

Si f est continue en (x_0, y_0), alors les fonctions partielles f_{2,x_0} et f_{1,y_0} en (x_0, y_0) sont continue en y_0 et x_0 respectivement.

!!! ATTENTION !!!

La réciproque est fausse !

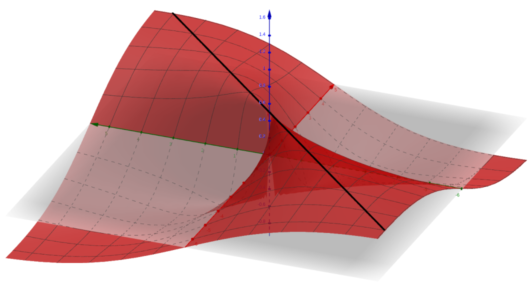
Il ne suffit pas que les deux fonctions partielles en un point soient continue pour que la fonction le soit. Le problème vient précisément de la profusion de direction selon laquelle on peut se déplacer. Or les deux fonctions partielles ne permettent que de se déplacer selon les deux directions des axes de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Mais on ne tests pas les autres directions de déplacements.

Contre-exemple :

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Les applications $f_{1,0} : x \mapsto f(x,0) = 0$ et $f_{2,0} : y \mapsto f(0,y) = 0$ sont constantes nulles donc continues. Mais $\forall x \neq 0$, $f(x,x) = 1/2$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.



Proposition 2.5 (Continuité et composition) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $g : U \to \mathbb{R}$ continue et $g(U) \subset I$.
Alors $f \circ g : U \to \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration :
La démonstration est la même que pour les fonctions d'une seules variables. Il suffit d'adapter la démonstration et en particulier la notion de limites au cas des fonctions de deux variables. ☐

Remarque (Coordonnées polaires) :
Pour étudier la continuité d'une fonction en $(0,0)$, on peut utiliser les coordonnées polaires. En effet, en considérant les coordonnées polaires (r, θ) (avec $r > 0$) d'un point $(x, y) \neq (0,0)$, on a alors l'équivalence $(x, y) \to (0,0) \iff r \to 0$. On se ramène alors à un problème en une seule dimension.

L'idée est que pour tendre vers $(0,0)$, comme pour le cas d'une seule variable mais avec "les degrés de libertés supplémentaires", ça ne doit pas dépendre de la façon dont on se rapproche de $(0,0)$. Et c'est ce que traduit les coordonnées polaires : peu importe l'angle θ qu'on a avec la droite des abscisses, on se rapproche quand même de $(0,0)$.

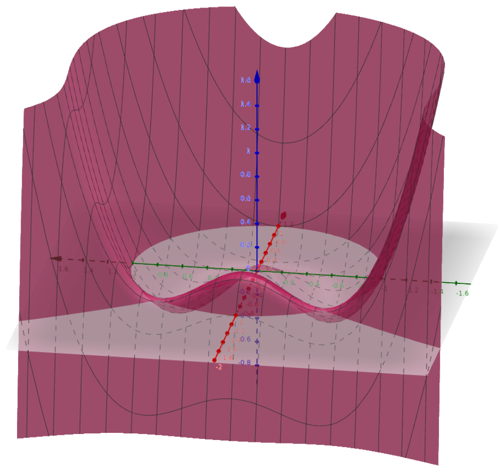
Évidemment, cette remarque peut aussi servir pour montrer qu'une fonction n'est PAS continue en $(0,0)$. Si la limite dépend de l'angle d'incidence, par exemple.

Exemple 2.2 :

On considère la fonction f définit par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} (x^3+y^2)\ln(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.



Exemple 2.3 :
La fonction définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ est continue selon toutes les droites par $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

3 Dérivées partielles

3.1 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 3.1 (Dérivées partielles d'ordre 1) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $(x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

- Si la fonction partielle $f_{1,y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, alors on dit que f *admet une dérivée partielle d'ordre* 1 *en* (x_0, y_0) *par rapport à* x et on note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{1,y_0}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

- Si la fonction partielle $f_{2,x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, alors on dit que f *admet une dérivée partielle d'ordre* 1 *en* (x_0, y_0) *par rapport à* y et on note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{2,x_0}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x (resp. par rapport à y) en tout point (x_0, y_0) de U, on dit que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x (resp. y) sur U. On définit alors deux nouvelles fonctions de deux variables $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Remarque (Notations) :
Les dérivées partielles peuvent également se noter sous la forme $D_1 f(x, y)$ et $D_2 f(x, y)$ pour les dérivées partielles par rapport à la première variable et par rapport à la seconde variable respectivement. Ces notations sont plus cohérentes par rapport à ce qui se passe réellement, mais elles sont peu usitées (et pas clairement explicitement au programme).

En fait, pour les dérivées partielles, on dérive par rapport à une position, plus qu'une variable. Bien comprendre ça est fondamentale pour ensuite bien comprendre ce qui se passe avec des compositions.

Définition 3.2 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (x_0, y_0) (resp. sur U) si f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0) (resp. sur U) et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continue en (x_0, y_0) (resp. sur U).

Remarque (Différentiabilité) :
En fait, les dérivées partielles correspondent à la notion de dérivée (au sens des fonctions d'une seule variable) en considérant la fonction obtenue en se déplaçant selon les deux axes au point (x_0, y_0). Mais, à l'instar de la notion de limite, en se déplaçant selon une autre direction, on pourrait ne pas avoir de dérivabilité. Il faut donc définir la notion plus générale de dérivée directionnelle : si $a \in U$ et $u \in \mathbb{R}^2$ (la direction selon laquelle on se déplace)

$$d_a f(u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h}$$

L'application $d_a f$ s'appelle la différentielle de f en a.

Les dérivées partielles sont alors les dérivées directionnelles en un point selon les deux directions des des axes. Autrement dit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = d_{(x_0,y_0)} f(1, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = d_{(x_0,y_0)} f(0, 1)$$

Il peut y avoir des directionnelles selon certaines directions mais toutes. Si la différentielles existe en $a \in U$, alors toutes les dérivées directionnelles existent aussi (en particulier les dérivées partielles). En revanche, une fonction peut avoir des dérivées directionnelles selon toutes les directions en un point $a \in U$ sans qu'elle admette une différentielle en a.

Exemple 3.1 :
On considère l'application $f : (x, y) \mapsto x^2 y + y^2 + 3x$. f est une fonction polynomiale en x et y donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors

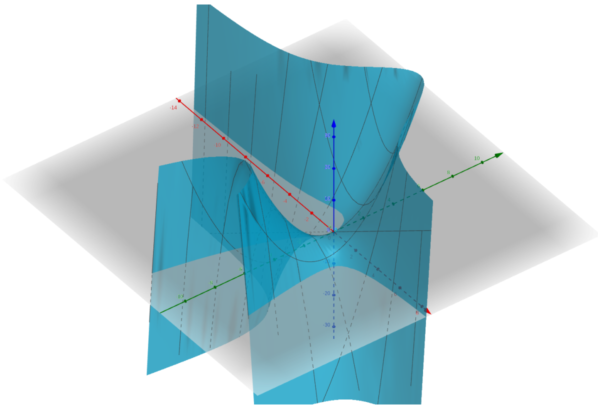
$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{(x^2 - x_0^2) y_0 + 3(x - x_0)}{x - x_0} = (x + x_0) y_0 + 3 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0 y_0 + 3$$

et

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{x_0^2 (y - y_0) + y^2 - y_0^2}{y - y_0} = x_0^2 + y + y_0 \xrightarrow[y \to y_0]{} x_0^2 + 2y_0$$

Donc f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Donc f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2y.$$



Exemple 3.2 :
On considère l'application $f : (x, y) \mapsto e^{x+y} + \ln(x - y)$.

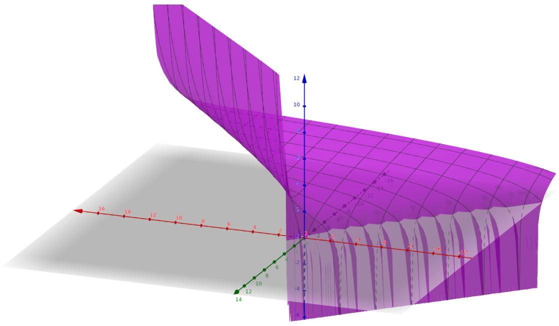
f est définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y\}$. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, si on note D la droite d'équation $x - y = 0$, alors $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ avec $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. e_1 est unitaire et $e_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ est normal à D et unitaire. Alors la distance de $(a, b) \in U$ à D est $r = \|p_{D^\perp}(a, b)\| = \| \langle (a, b)|e_2 \rangle\, e_2\| = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Et donc si $(x, y) \in \mathcal{B}((a, b), r/2)$, alors $x - y > a - \frac{a-b}{2\sqrt{2}} - b - \frac{a-b}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(a - b) > 0$. Donc $\mathcal{B}((a, b), r/2) \subset U$. Et donc U est bien un ouvert.

Soit $(x_0, y_0) \in U$. On considère $f_{x_0} : y \mapsto e^{x_0+y} + \ln(x_0 - y)$ et $f_{y_0} : x \mapsto e^{x+y_0} + \ln(x - y_0)$ qui sont définie sur $]-\infty, x_0[$ et $]y_0, +\infty[$ respectivement. Ce deux applications sont continues (en tant que fonction d'une seule variable). En particulier, elles sont continue en y_0 et x_0 respectivement. Donc toutes les applications partielles de f sont continues en tous les points de U, donc f est continue sur U.

Soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors f_{x_0} et f_{y_0} sont dérivables en y_0 et x_0 respectivement (en tant que fonction d'une seule variable). Et donc f admet des dérivées partielles sur U avec

$$\forall (x, y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+y} + \frac{1}{x - y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} - \frac{1}{x - y}.$$

De plus, en tant qu'applications de deux variables, les deux dérivées partielles sont continues (les 4 fonctions partielles des 2 dérivées partielles sont continues sur U), donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.



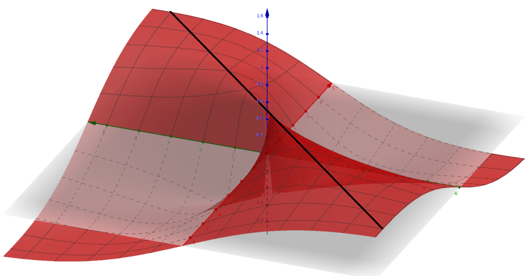
!!! ATTENTION !!!

Il n'y a pas d'équivalences entre la continuité et l'existence de dérivées partielles : une fonction peut avoir des dérivées partielles en un point sans être continue en ce point.

Contre-exemple :

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$



Les applications $f_{1,0} : x \mapsto f(x,0) = 0$ et $f_{2,0} : y \mapsto f(0,y) = 0$ sont constantes nulles donc continues. Mais $\forall x \neq 0$, $f(x,x) = 1/2$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
Mais $x \mapsto f(x,0) = 0$ est dérivable en 0. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3.2 Gradient et développement limité

Théorème 3.1 (Développement limité d'ordre 1) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $(x_0, y_0) \in U$.

Alors

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|).$$

On peut écrire cette relation sous la forme :

$$f(x, y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{=} f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

La notion de convergence et le o utilise la norme de $\mathbb{R}^2$, en l'occurrence, la norme 2. Donc ici, on peut remplacer $o(\|(h, k)\|)$ par $o(\sqrt{h^2 + k^2})$.

Démonstration (Sketch) *:*
On considère la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$ (qui correspond donc à la surface dessinée par le graphe de f). La quantité $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ mesure donc l'écart de hauteur entre un point de la surface proche de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ et ce même point.

Or, en prenant un voisinage de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ suffisamment petit, on peut approximer la surface par son plan tangent (à l'instar de la dimension 1 où l'on peut approximer une courbe par sa tangente sur un voisinage suffisamment petit). Donc, on peut approximer la différence $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ par un point du plan tangent à la surface en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avec un petite erreur qui dépend de l'éloignement du point que l'on considère au centre du voisinage.

Or, en (x_0, y_0), on a les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y_0}(x_0, y_0)$ qui donnent les variations dans deux directions perpendiculaire. Ce qui permet d'obtenir l'approximation du théorème. □

Définition 3.3 (Gradient) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$ tel que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ en (x_0, y_0).

On appelle *gradient de f en (x_0, y_0)*, noté $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ ou $\nabla f(x_0, y_0)$, par

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 3.2 (Développement limité par le gradient) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit $(x_0, y_0) \in U$.
Alors

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \langle (h, k) | \nabla f(x_0, y_0) \rangle + o(\|(h, k)\|).$$

Là encore, on peut reformuler cette relation avec les différentes notations :

$$f(x, y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{=} f(x_0, y_0) + \langle (x - x_0, y - y_0) | \mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) \rangle + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Démonstration :
C'est évident compte tenu du fait qu'on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ et l'expression du produit scalaire dans un BON. □

Remarque :
Le gradient de f en (x_0, y_0) donne la direction, en (x_0, y_0), selon laquelle la fonction croît le plus vite.

3.3 Dérivées partielles et composition

Définition 3.4 (Dérivée directionnelle) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^2$.
On définit *la dérivée directionnelle de f selon v en a* par la limite, si elle existe :

$$d_a f(v) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

Remarque :
Cette définition a bien un sens car U est un ouvert et $a \in U$. Donc, $\exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset U$. Et pour h assez petit (précisément pour $h < \frac{r}{\|v\|}$), $a + hv \in \mathcal{B}(a, r) \subset U$.

Proposition 3.3 (Expression de la dérivée directionnelle par le gradient) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^2$.
Alors

$$d_a f(v) = \langle \nabla f(a) | v \rangle .$$

Démonstration :
On note $a = (x_0, y_0)$ et $v = (x, y)$. Alors, par l'expression du produit scalaire par le gradient,

$$\begin{aligned} f(a + hv) &= f(x_0 + hx, y_0 + hy) \\ &\underset{h \to 0}{=} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0) | (hx, hy) \rangle + o(\|(hx, hy)\|) \\ &\underset{h \to 0}{=} f(x_0, y_0) + h \langle \nabla f(x_0, y_0) | (x, y) \rangle + o(h\|(x, y)\|) \\ &\underset{h \to 0}{=} f(a) + h \langle \nabla f(a) | v \rangle + o(h) \end{aligned}$$

D'où, par unicité de la limite,

$$d_a f(v) = \langle \nabla f(a) | v \rangle .$$

□

Proposition 3.4 (Lien entre dérivée directionnelle et dérivée partielle) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit $(a, b) \in U$.
Alors

$$\frac{\partial f}{dx}(a, b) = d_{(a,b)} f(1, 0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = d_{(a,b)} f(0, 1).$$

Démonstration :
Il suffit d'appliquer les définitions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f((a, b) + h(1, 0)) - f(a, b)}{h} \\ &= d_{(a,b)} f(1, 0). \end{aligned}$$

Et de même pour l'autre dérivée partielle. □

Donc les dérivées partielles sont les dérivées directionnelles en un point selon les vecteurs directeurs unitaires des axes.

Théorème 3.5 (Règle de la chaîne) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\forall t \in I$, $(x(t), y(t)) \in U$.

Alors la fonction $\varphi : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I,\ \varphi'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Démonstration :
Soit $t \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $t + h \in I$. On a encore $(x(t+h), y(t+h)) \in U$. Et

$$\begin{aligned}
&\varphi(t+h)\\
=&f(x(t+h), y(t+h))\\
\underset{h\to 0}{=}&f\Big(x(t) + hx'(t) + o(h), y(t) + hy'(t) + o(h)\Big) && \text{carac DL et dériv}\\
\underset{h\to 0}{=}&f(x(t), y(t)) + (hx'(t) + o(h))\tfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + (hy'(t) + o(h))\tfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) + o(\|(hx'(t) + o(h), hy'(t) + o(h))\|)\\
\underset{h\to 0}{=}&f(x(t), y(t)) + \Big(x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\Big)h\\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\right) o(h) + o(h\|(x'(t) + o(1), y'(t) + o(1))\|)\\
\underset{h\to 0}{=}&\varphi(t) + \left(x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\right) h + o(h)
\end{aligned}$$

Par caractérisation de la dérivabilité par les DL, φ est donc dérivable en t (et donc sur I) et $\varphi'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$. □

Remarque :
La fonction $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ correspond à un chemin, un arc, dans l'ouvert U. Donc la fonction φ correspond à un arc sur la surface d'équation $z = f(x, y)$. C'est une fonction d'une variable réelle dans $\mathbb{R}$. Et sa dérivée correspond donc aux variations de f en se déplaçant selon l'arc γ.

Proposition 3.6 (Expression de la règle de la chaîne avec le gradient) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\forall t \in I$, $(x(t), y(t)) \in U$. On pose $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$.

Alors $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et

$$\forall t \in I,\ (f \circ \gamma)'(t) = \left\langle \nabla f(\gamma(t)) \middle| \gamma'(t) \right\rangle.$$

De nouveau, il est possible de faire varier les notations.

Démonstration :

C'est évident compte tenu de l'expression du produit scalaire dans un BON et avec $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$.

□

Proposition 3.7 (Règle de la chaîne généralisée) :
Soit U, Ω deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit $x, y \in \mathcal{C}^1(O, \mathbb{R})$ telles que $\forall (u,v) \in O$, $(x(u,v), y(u,v)) \in \Omega$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et F définie sur O par $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

Alors $F \in \mathcal{C}^1(O, \mathbb{R})$ et $\forall (u,v) \in O$,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

Démonstration :
Il suffit d'appliquer le théorème précédent aux applications $u \mapsto F(x(u,v), y(u,v))$ et $v \mapsto F(x(u,v), y(u,v))$.

□

Définition 3.5 (Lignes de niveau) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $k \in \mathbb{R}$.

On appelle *ligne de niveau* k *de* f l'ensemble $\{(x,y) \in U,\ f(x,y) = k\}$.

Proposition 3.8 (Lignes de niveau) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $k \in \mathbb{R}$.

La ligne de niveau k de f correspond à l'intersection de la surface d'équation $z = f(x,y)$ et du plan d'équation $z = k$. Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

Démonstration :
Soit $(x_0, y_0) \in U$. On pose $k = f(x_0, y_0)$ et $C_k = \{(x,y) \in U,\ f(x,y) = k\}$ la ligne de niveau k de f.

Soit γ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ sur la ligne de niveau k de f paramétré par le segment $]-1,1[$ tel que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$. Autrement dit, on considère $\gamma :]-1,1[\to C_k$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.

Alors, $\forall t \in]-1,1[$, $f(\gamma(t)) = f(x_0, y_0) = k$. Donc f est constante le long du chemin γ. Par composition, $f \circ \gamma$ est dérivable et par la règle de la chaîne,

$$\forall t \in]-1,1[,\ 0 = (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle .$$

En particulier, en $t = 0$, $0 = \langle \mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) | \gamma'(0) \rangle$.

Donc $\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la tangente à l'arc γ en (x_0, y_0). Et donc $\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau k de f en (x_0, y_0). Donc le gradient est orthogonal à toute la ligne de niveau. $\square$

Remarque :
Le gradient est orthogonal à toutes les lignes de niveau. Par conséquent, en un point donné, passe une seule ligne de niveau. Le gradient y étant orthogonal, il est donc orienté dans la direction de plus grande pente en ce point là.

Autrement dit, le gradient permet, en tous les points où il est défini, de repérer la direction dans laquelle f varie le plus en ce point là.

Théorème 3.9 (Composition et fcts de deux variables) :
Soit $U, V \subset \mathbb{R}^2$ deux ouverts. Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(V, U)$. On peut donc considérer la fonction $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

Alors $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et de plus,

$$\forall (u, v) \in V, \ \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

Remarque :
Attention aux notations. La "variable apparente" au dénominateur des dérivées partielles ne sont pas vraiment des variables. Elles correspondent plutôt à des indication de place : on donne un nom à la première variable et on dérive par rapport à la variable en première position, en utilisant son nom que l'on identifie à la position.

La seconde notation proposée pour les dérivées partielles est plus cohérente de ce point de vue. Rajouter du formalisme et insister sur les notations peut alors permettre de pouvoir s'en sortir.

Exemple 3.3 :
Soit $f : (x, y) \mapsto \ln(1 + x^2) - xy$ et $\varphi : (u, v) \mapsto u + v$ et $\varphi : (u, v) \mapsto u - v$. Calculer les dérivées partielles de $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

On a $g : (u, v) \mapsto \ln(1 + u^2 + v^2 + 2uv) - u^2 + v^2$. φ, ψ, g et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2} - y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x$$

et

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) = 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) = -1 \end{cases}$$

De plus, en tant que fonction de deux variables, on a

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{2u+2v}{1+u^2+v^2+2uv} - 2u \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{2v+2u}{1+u^2+v^2+2uv} + 2v \end{cases}$$

Enfin, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) = \frac{2(u+v)}{1+(u+v)^2} - (u-v) - (u+v) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) = \frac{2(u+v)}{1+(u+v)^2} - (u-v) - (u+v)(-1) \end{cases}$$

4 Extremums d'une fonction de deux variables

Définition 4.1 (Minimum local, maximum local) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$.
On dit que f admet un *minimum local en* (x_0, y_0) (resp. maximum local) si il existe un voisinage V de (x_0, y_0) dans U tel que $\forall (x,y) \in V$, $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ (resp. $\forall (x,y) \in V$, $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$).

Exemple 4.1 :
Si on considère la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$, f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et $f(0,0) = 0$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$. Donc $(0,0)$ est un minimum local (et même global) pour f.

Définition 4.2 (Extremum) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$.
Le point (x_0, y_0) est un *extremum* de f si c'est soit un maximum, soit un minimum de f.

Définition 4.3 (Extremum globaux) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$.

Le point (x_0, y_0) est un minimum global (resp. maximum global) de f si $\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ (resp. $\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$).

Un extremum global est un point qui est soit un minimum global, soit un maximum global de f.

Définition 4.4 (Point critique) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ et (x_0, y_0).

Si f admet deux dérivées partielles en (x_0, y_0) et si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, alors le point (x_0, y_0) est appelé *un point critique de* f.

Proposition 4.1 (Caractérisation des points critiques par le gradient) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$ tel que f admette deux dérivées partielles en (x_0, y_0).

Alors (x_0, y_0) est un point critique de f, si, et seulement si, $\operatorname{grad}_{(x_0,y_0)} f = \nabla f(x_0, y_0) = 0$.

Proposition 4.2 (Théorème de recherche des extremums locaux) :
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in U$.

Si (x_0, y_0) est un extremum local de f sur U et si f admet deux dérivées partielles en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Démonstration :
On considère la fonction $\varphi : t \mapsto f(x_0 + t, y_0)$. φ est définie sur un ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$. f admettant des dérivées partielles en (x_0, y_0), la fonction φ est donc dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

De plus, comme (x_0, y_0) est un extremum local de f, 0 est alors également un extremum local de φ. Et donc, $\varphi'(0) = 0$.

An raisonnant de la même manière avec $\psi : t \mapsto f(x_0, y_0 + t)$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Et donc (x_0, y_0) est bien un point critique de f. □

Exemple 4.2 :
Soit $f : (x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^4$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ admettant un minimum local non global sur $\mathbb{R}^2$.

f est une fonction polynomiale, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet donc des dérivées partielles en tout point et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(1+y)^3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2(1+y)^2 + 4y^3.$$

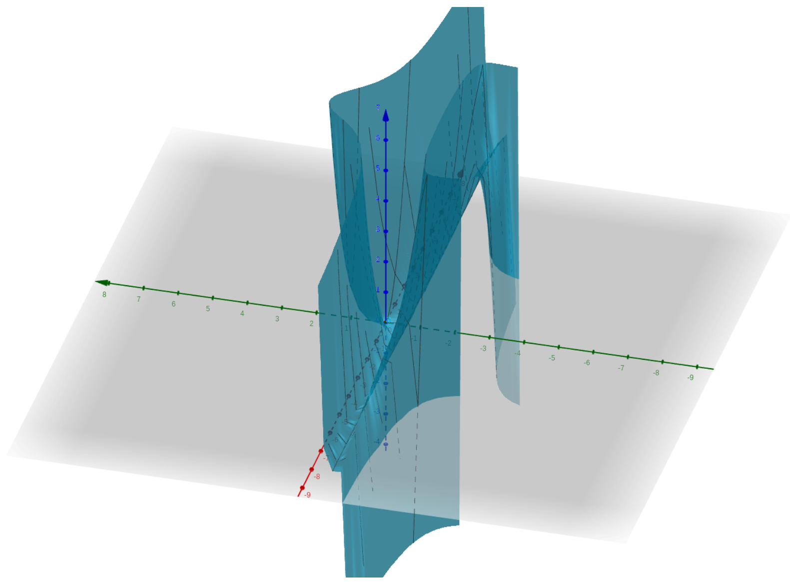
On recherche les points critiques : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = 0 &\iff \begin{cases} 2x(1+y)^3 = 0 \\ 3x^2(1+y)^2 + 4y^3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = -1 \\ 3x^2(1+y)^2 + 4y^3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \text{ et } 4y^3 = 0 \\ \text{ou} \\ y = -1 \text{ et } -4 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc f n'a qu'un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$ qui est $(0,0)$ avec $f(0,0) = 0$.

De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$, $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$. Or $\mathbb{R}\times]-1,1[$ est un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, donc f admet un minimum local en $(0,0)$ (qui vaut 0).

Par ailleurs, $f(x,x) = x^2(1+x)^3 + x^4 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^5 \xrightarrow[x\to-\infty]{} \pm\infty$. En particulier, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0,x_0) < -1$. Et donc $(0,0)$ n'est pas un extremum global.



!!! ATTENTION !!!

La réciproque est bien sûr fausse ! C'était déjà faut dans $\mathbb{R}$, c'est pire dans $\mathbb{R}^2$. Tout point critique n'est pas un extremum. Mais tous les extremums sont des points critiques. Autrement dit, la liste des points critiques contient la liste des extremums locaux.

Exemple 4.3 :
On considère $f : (x, y) \mapsto (x - y)e^{xy}$.

f est définie sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1 + xy - y^2)e^{xy} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-1 + x^2 - xy)e^{xy}.$$

Donc si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y) = 0 &\iff \begin{cases} (1 + xy - y^2)e^{xy} = 0 \\ (-1 - xy + x^2)e^{xy} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1 + xy - y^2 = 0 \\ -1 - xy + x^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1 + xy - y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} 1 + xy - y^2 = 0 \\ x = y \text{ ou } x = -y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y \text{ et } 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x = -y \text{ et } 1 - 2x^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -y \\ x = \pm 1/\sqrt{2} \end{cases} \\
&\iff (x, y) = \pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

f admet donc deux points critiques.

Mais

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t + \frac{1}{\sqrt{2}}, t - \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}e^{t^2 - 1/2} \geq \sqrt{2/e} = f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}).$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t + \frac{1}{\sqrt{2}}, -t - \frac{1}{\sqrt{2}}) = (2t + \sqrt{2})e^{-(t+1/\sqrt{2})^2} \leq \sqrt{2/e}.$$

En effet, si on pose $g : t \mapsto (2t + \sqrt{2})e^{-(t+1/\sqrt{2})^2}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

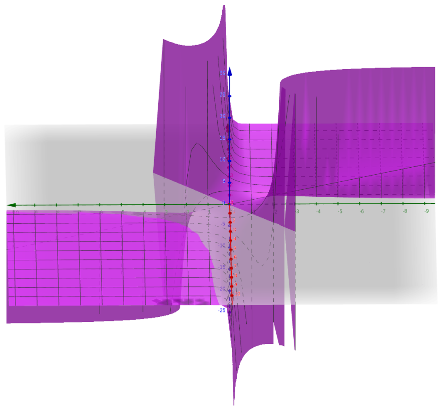
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = (2 - 2(t + 1/\sqrt{2})(2t + \sqrt{2}))e^{-(t+1/\sqrt{2})^2} = -4t(\sqrt{2} + t)e^{-(t+1/\sqrt{2})^2}$$

On a donc le tableau de variations

t	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\searrow$	$-\sqrt{2/e}$	$\nearrow$	$\sqrt{2/e}$	$\searrow$	0

Donc $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ n'est pas un extremum de f (c'est même un point col de f).

Le même raisonnement, montre que $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ n'est pas non plus un extremum.



!!! ATTENTION !!!

Il est très important de se situer sur un ouvert pour que le théorème de recherche des extremums puisse marcher. L'ouvert permet d'éviter les effets de bords. On a déjà vu des contre-exemple dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$, les bords sont beaucoup plus grands, il y a donc beaucoup plus de problèmes, mais le principe est le même.