Chapitre 31 - TD :
Fonctions de plusieurs variables

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

25 juin 2024

1 Continuité, dérivées partielles, applications $\mathcal{C}^1$

Exercice 1 (Continuité) :
Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f_2(x,y) = \begin{cases} xy\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
3. $f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y} & xy \neq 0 \\ 0 & y = 0 \\ y/2 & x = 0,\ y \neq 0 \end{cases}$

Exercice 2 (Calculs de dérivées partielles) :
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes, après avoir justifiées qu'elles existent : s

1. $f_1(x,y) = xye^{\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $f_2(x,y) = x^y$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 3 :
On pose $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le développement limité à f à l'ordre 1 en point $(1,2)$.
3. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1,2)$.

Exercice 4 (Lignes de niveau) :
On pose $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition U de f.
2. Déterminer les lignes de niveau de f.
3. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f en un point quelconque $(x_0, y_0) \in U$.

Exercice 5 :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées directionnelles selon toutes les directions en $(0,0)$.
2. Calculer $f(x,x^2)$ pour tout $x \neq 0$. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 6 :
Soit $a, b > 0$ et f définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$ par

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^a y^b}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pour quelle valeur de (a,b), f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 7 :
Soit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8 (Règle de la chaîne) :
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(e^t \cos(t), \ln(1+t^2))$.
Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer sa dérive en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 9 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ u(x,y) = \int_x^y f(t)dt.$$

Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles.

Exercice 10 :
Étudier la continuité et l'existence et la continuité des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f_2(x,y) = \|(x,y)\|$

Exercice 11 :
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12 (*) :
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & x \neq y \\ f'(x) & x = y \end{cases}$$

Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

2 Extremums

Exercice 13 :
Déterminer les extremums locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f_1(x,y) = x^3 + y^3$
2. $f_2(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
3. $f_3(x,y) = 2y^4 - 3xy^2 + x^2$
4. $f_4(x,y) = x^3 - y^2 - x$

Exercice 14 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = xe^y + ye^x$.

1. Montrer que $(-1,-1)$ est le seul point critique de f.
2. Montrer que f n'admet par d'extremum.

Exercice 15 :
Déterminer les extremums de la fonction $f :]0,1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y - \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{3}y^3$.

Exercice 16 :
Déterminer les extremums de $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$

Exercice 17 (Extremums avec bordures) :
Déterminer les extremums de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2-2y$ sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

Exercice 18 (*) :
Déterminer le maximum du produit xyz si $x+y+z=1$ et $x,y,z \geq 0$.

3 Équations aux dérivées partielles

Exercice 19 :

1. (a) Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

(b) Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

2. (a) En considérant la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = f(-x + y, 3x - 2y)$, déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

(b) En considérant la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[$ par $F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exercice 20 :

ON souhaite déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ 2x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y(1 + y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ définie par $\varphi(u, v) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}\right)$.

1. Montrer que φ est bijective et déterminer sa réciproque.
2. Résoudre l'équation à l'aide du changement de variables $x = \frac{u^2+v^2}{2}$, $y = u/v$.