Chapitre 2 - TD : Complexes

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

10 septembre 2024

1 Bazar généraliste

Exercice 1 :
Donner les complexes suivants sous forme algébrique

$$z_1 = (2+3i)(3+4i) \qquad z_2 = \frac{2+i}{3-2i} \qquad z_3 = (1+i)^7$$

$$z_4 = \left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right)^2 \qquad z_5 = \frac{(1+i)^5-1}{(1+i)^5+1} \qquad z_6 = (1+e^{i\theta})^n,\ n \in \mathbb{N}$$

$$z_7 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta},\ -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

Exercice 2 :
Calculer le module et argument (à 2π près) des complexes suivants, avec $n \geq 1$:

$$z_1 = (1+i)^{2n} \qquad z_2 = (1+j)^{2n} \qquad z_3 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{1515}$$

$$z_4 = \frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan\theta^2} \qquad z_5 = \frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$$

Exercice 3 :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$$

Exercice 4 :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 = \overline{z}.$$

Exercice 5 ([✓]) :

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer :

$$1 \leq |1+a| + |a+b| + |b|$$

2. Montrer, par un raisonnement analogue, que $\forall z, z' \in \mathbb{C}$,

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \qquad \text{et} \qquad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

Exercice 6 :
Montrer que $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $i\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 :
Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.
Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

Exercice 8 :
On pose $\omega = e^{2i\pi/7}$.
Calculer $\omega + \omega^2 + \omega^4$ et $\omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

Exercice 9 :
Soit $a, b \in \mathbb{U}$ tels que $|a + b| = \sqrt{3}$. Calculer $|a - b|$.

Exercice 10 :
Soit $a, b \in \mathbb{U}$ tels que $a - b \neq 0$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{z + ab\overline{z} - a + b}{a - b}\right) = -1.$$

2 Trigonométrie

Exercice 11 (* [✓]) :**
Exprimer $\cos(3\theta)\sin(6\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, puis $\cos((2n+1)\theta)$ et $\cos(2n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ seulement (ces deux dernières relations donnent naissance aux polynômes de Tchebychev que nous reverrons dans le TD sur les polynômes).
Exprimer $\cos(\theta)^{2n}$ et $\cos(\theta)^{2n+1}$ en fonction de termes de la forme $\cos(k\theta)$. Même chose avec $\sin$.

Exercice 12 ([✓]) :
Donner une formule simple de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Même chose pour la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

3 Résolution d'équation

Exercice 13 :
Déterminer les complexes z tel que $z^2 = z_0$ avec $z_0 \in \{2 + i, 4i - 3, 8i - 15, 9 + 40i\}$.

Exercice 14 ([✓]) :
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 + iz + 2 = 0$$

et

$$z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$$

Exercice 15 :

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. Si z est une solution de l'équation précédente et $x = z + 1/z$, montrer que x vérifie une équation simple.
3. En déduire une valeur de $\cos(2\pi/5)$.

Exercice 16 ([✓]) :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre

$$(z-1)^n = (z+1)^n$$

Exercice 17 ([✓]) :
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = 0$ sachant qu'il y a une racine réelle
2. $z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = 0$ sachant qu'il y a une racine réelle et une imaginaire pure
3. $z^8 - 2(i\sqrt{3}-1)z^4 - 8(1+i\sqrt{3}) = 0$

4 Exponentielle complexe

Exercice 18 ([✓]) :
Soit p et q deux entiers tels que $0 \leq p \leq q$ et $x \in \mathbb{R}$ qui ne soit pas un multiple de 2π. Prouver alors

$$\left|\sum_{k=p}^{q} e^{ikx}\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

Exercice 19 :
Résoudre dans $\mathbb{C}$

1. $e^z = 1$
2. $e^z = 2i$
3. $e^z + e^{-z} + 1 = 0$
4. $\begin{cases} e^z + e^{z'} = 2 \\ e^{z+z'} = 2 \end{cases}$
5. $e^{e^z} = 1$

5 Géométrie

Exercice 20 :
Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe tels que :

1. $\frac{z}{z-1} \in \mathbb{R}$
2. $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$
3. $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$

Exercice 21 :
Résoudre géométriquement

$$\begin{cases} |z-i| = 1 \\ |z| = |z-1-i| \end{cases}$$

Exercice 22 :
On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\},\ f(z) = \frac{z-2}{z+i}$$

1. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $f(z) \in \mathbb{R}$
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $f(z) \in i\mathbb{R}$

6 Le coin des grands

Exercice 23 :
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 24 :
Soit $a, b \in \mathbb{C}^*$. Montrer l'égalité

$$\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$$

Exercice 25 (Identité du parallélogramme) :
Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{C}$,

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

et donner une interprétation géométrique.

Exercice 26 ([✓]) :
Démontrer les inégalités suivantes et discuter les cas d'égalités :

1. $|\mathfrak{Re}(z)| + |\mathfrak{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$
2. $|1+z| + |z+z'| + |z'| \geq 1$
3. $|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$

Exercice 27 :

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Montrer $2|z| \leq |z+z'| + |z-z'|$
2. En déduire que $|z| + |z'| \leq |z+z'| + |z-z'|$
3. Vérifier $(|z+z'| + |z-z'|)^2 - (|z| + |z'|)^2 = 2|z^2 - z'^2| + (|z| - |z'|)^2$
4. Utiliser le 3. pour discuter les cas d'égalité de l'inégalité du 2.

Exercice 28 :

On pose $Z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Calculer $|Z|$.
2. Si $\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, calculer $\cos(2\theta)$.
3. En déduire un argument simple de Z.

Exercice 29 :

Soit ABC un triangle et $p \in]0,1[$. On considère les points A', B' et C' définis par

$$\overrightarrow{AA'} = p\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{BB'} = p\overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA}.$$

Dans le plan complexe, on note a, b, c les affixes respectives des points A, B et C et a', b' et c' celles des points A', B' et C' respectivement.

On note enfin $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer ω^3, $1+\omega+\omega^2$, puis comparer ω^2 à $\overline{\omega}$.
2. Montrer que $a' = (1-p)a + pb$.
   De même, exprimer b' et c' en fonction de a, b, c et p.
3. (a) Exprimer $|1-p+p\omega|$ en fonction de p.
   (b) En déduire que, $\forall p \in]0,1[$, $0 < |1-p+p\omega| < 1$ puis que $0 < |1-p+p\omega^2| < 1$.
   (c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} |1-p+p\omega|^n$ et $\lim_{n\to+\infty} |1-p+p\omega^2|^n$.
4. Étude d'un exemple : On considère un triangle équilatéral direct ABC de côté $4cm$.
   (a) Faire une figure et placer les points A', B' et C' lorsque $p = 1/4$.
   (b) Calculer la longueur $A'B'$.
   Indic : *On pourra définir un repère orthonormé d'origine B approprié et déterminer les affixes des points dans ce repère.*

Exercice 30 :

Soit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{U}$. On pose $z = \left(\sum_{k=1}^n z_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right)$. Montrer que z est un réel tel que $0 \leq z \leq n^2$.

Exercice 31 (*) :

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|1+z+z^2+\cdots+z^9| = 1$ et $|z| = 1$. Montrer que $z^9 = 1$ ou $z^{11} = 1$.