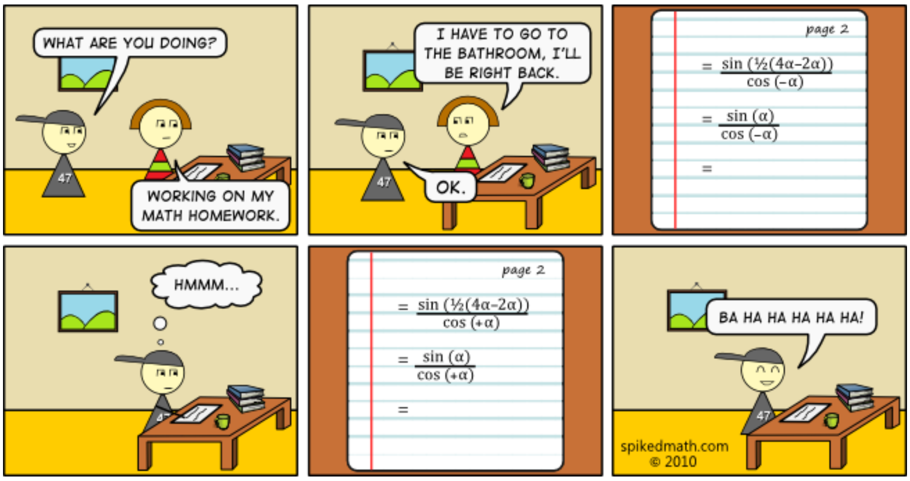
Chapitre 4
Fonctions usuelles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

24 septembre 2024



Ce chapitre est là pour donner les fonctions de référence qui vont être utilisés à maintes reprises par la suite. Idéalement, il devrait apparaître plutôt en fin d'année. Beaucoup des propriété énoncé ici ne peuvent être démontré qu'en utilisant les chapitres ultérieures (intégration, dérivation, limites, continuité, développement limités, croissances comparées, analyse asymptotique ...). Mais il faut bien commencer par quelque chose et il faut bien quelques outils pour pouvoir avancer. Il est donc possible que les démonstrations vous paraissent un peu bancales. C'est normal. Ça s'éclaircira par la suite.

> L'invention des logarithmes en réduisant le temps passé au calcul de quelques mois à quelques jours, double, pour ainsi dire, la vie des astronomes.
>
> Pierre-Simon De Laplace (1749-1827)

Table des matières

1 Puissances et Logarithmes

1.1 Logarithme népérien

Définition 1.1 (Logarithme népérien) :
On appelle logarithme népérien, la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie comme l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Historiquement, le logarithme népérien a été fabriqué pour des besoins calculatoires. Cette fonction a été créé pour transformer un produit en somme et être une bijection. Les sommes étant beaucoup plus faciles à faire que les produits et beaucoup moins gourmandes en termes de mémoire (informatique) nécessaire, c'était un gros avantage du temps où les calculette n'existait pas. Mais aujourd'hui, on le définit autrement. C'est plus agréable.

Proposition 1.1 (Propriétés analytique de $\ln$) :
La fonction $\ln$ est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration :
Cela provient directement de la définition de $\ln$. □

Proposition 1.2 (Propriété algébrique de $\ln$) :
La fonction $\ln$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\forall x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

(ii) $\forall x > 0$, $\ln(1/x) = -\ln(x)$

(iii) $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$

(iv) $\ln(1) = 0$

Démonstration :

(i) Soit $y > 0$ et la fonction $f : x \mapsto \ln(xy) - \ln(y)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est dérivable (voir plus tard les opérations sur les fonctions dérivables) et $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

et $f(1) = \ln(y) - \ln(y) = 0$.

Donc f est la primitive de $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. Or cette primitive est unique (voir chapitre intégration), donc $f = \ln$. Et d'où le premier point en remettant les termes au bon endroit.

(ii) Soit $x > 0$ et $y = 1/x$. Alors $\ln(1) = 0 = \ln(x) + \ln(1/x)$. Ce qui nous donne le second point.

(iii) Soit $x > 0$. on sait que $\ln(x^1) = 1 \times \ln(x)$ et même $\ln(x^0) = 0 \times \ln(x)$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ln(x^n) = n\ln(x)$. Alors $\ln(x^{n+1}) = \ln(x \times x^n) = \ln(x) + n\ln(x) = (n+1)\ln(x)$. Et donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{Z}_-$. On pose $m = -n \in \mathbb{N}$. Alors $\ln(x^n) = \ln(1/x^m) = -\ln(x^m) = -m\ln(x) = n\ln(x)$. Ce qui termine le dernier point.

□

Remarque :
Le premier point peut servir de définition de la fonction $\ln$ (ce qui a été le cas historiquement). Et on peut retrouver toutes les propriétés de la fonction $\ln$ à partir de ça. Par exemple, on a $\ln(1) = \ln(1) + \ln(1)$ ce qui nous permet d'en déduire $\ln(1) = 0$. En utilisant le même procédé, on peut démontrer aussi la continuité et la dérivabilité.

Proposition 1.3 (Limites) :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Démonstration :
Puisque $x \mapsto \ln(x)$ est croissante, elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$ (voir chapitre sur les limites).

Mais $\ln(2^n) = n\ln(2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ car $\ln(2) > \ln(1) = 0$. Et d'autre part, $\ln(2^n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ par caractérisation séquentielle des limites (voir chap limites). Puis par unicité de la limite, on obtient donc $\ell = +\infty$. D'où $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$.

Puis, si $x \to 0^+$, alors $1/x \to +\infty$. Or $\ln(x) = -\ln(1/x)$ donc $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ par opérations sur les limites. □

On a donc le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition 1.4 (Limites de références du log) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

Démonstration :
La première limite est simplement le taux de variation de $\ln$ en 1. Or on sait que $\ln$ est dérivable, donc ce taux admet une limite qui n'est autre que la dérivé de $\ln$ en 1, c'est à dire 1.

Soit $x > 1$. Alors $x > \sqrt{x}$. Donc $\forall t \in [1, x]$, on a $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$. Les deux fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sont continues sur $[1, x]$ donc intégrables sur cet intervalle (cf chap intégration). On déduit donc, par croissance de l'intégrale (cf intégration) :

$$0 < \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{x} - 1)$$

D'où finalement,

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$$

Or les fonctions $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{2}{x}$ admettent toutes les deux des limites finies en $+\infty$ donc, par opérations sur les limites $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Et par théorème d'encadrement (cf chap limites), on a donc

$$\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Enfin, pour la dernière limite, on a $\forall x > 0$,

$$x\ln(x) = -x\ln(1/x) = -\frac{\ln(1/x)}{1/x}$$

et $1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. La composition dans les limites permet alors de conclure (voir chap limite). $\square$

Proposition 1.5 (Inégalité classique du log) :
On a

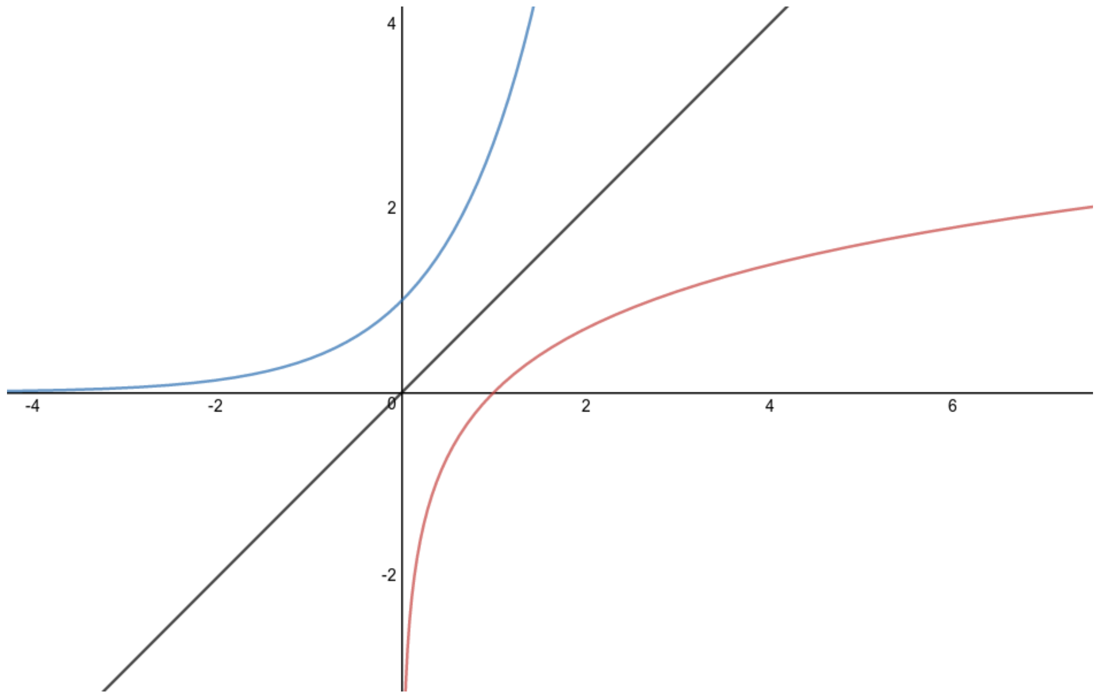
$$\forall x > -1, \ \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Démonstration :
C'est très classique. Il suffit d'étudier la différence. □

Remarque :
On précisera ce genre d'inégalité avec les formules de Taylor plus tard dans l'année. On pourra montrer que $x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x - x^2/2 + x^3/3$ par exemple. On peut aussi le faire en utilisant le TAF. Que nous reverrons.

1.2 Exponentielle népérienne

Définition 1.2 (Exponentielle népérienne) :
On appelle exponentielle népérienne la fonction $x \mapsto \exp(x) = e^x$, application réciproque de la bijection $x \mapsto \ln(x)$ de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.



On va avoir besoin du résultat suivant qui sera démontrée dans le chapitre sur la dérivabilité.

Théorème 1.6 (Dérivabilité d'une réciproque (voir chapitre dérivabilité)) :
Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ ouvert et $f : I \to J$ une fonction bijective dérivable sur I telle que $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Proposition 1.7 (Propriété analytique de l'exp) :
La fonction $\exp$ est définie, continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$$

et enfin

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration :
Comme $\exp$ est la réciproque de la fonction $\ln$ qui est une bijection continue strictement croissante $\ln$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, l'exponentielle est automatiquement continue strictement croissante (cf chap sur la dérivabilité, continuité) et ses limites sont respectivement 0^+ et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement (voir chap lim).

Et de plus, $\forall t > 0,\ \ln'(t) = 1/t \neq 0$, donc sa réciproque $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \frac{1}{(\exp^{-1})'(\exp(x))} = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)$$

La dernière limite n'est que le taux de variations de l'exponentielle en 0. □

Proposition 1.8 (Propriété algébrique de l'exponentielle) :
L'exponentielle vérifie les propriétés :

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x e^y$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e^{nx} = (e^x)^n$

Démonstration :
Il suffit de passer au logarithme :

(i) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$. Or $\ln$ est en particulier injective, donc $e^x e^y = e^{x+y}$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\ln(1/e^x) = -\ln(e^x) = -x = \ln(e^{-x})$ et par injectivité de la fonction $\ln$, on a le résultat.

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. De même que précédemment, $\ln((e^x)^n) = n\ln(e^x) = nx = \ln(e^{nx})$ et l'injectivité termine la preuve.

□

Définition 1.3 (Nombre de Néper) :
On appelle nombre de Néper, le nombre $e = \exp(1) = 2.71828\ldots$.

Remarque :
Dans votre année de terminale, on vous a certainement introduit l'exponentielle avant le logarithme. En fait, historiquement, c'est l'inverse qui a été fait. Le logarithme a été trouvé pour simplifier les calculs. Il permet de transformer un produit (difficile, long et gros à calculer) en une somme (beaucoup plus rapide, simple et légère).

On peut aussi définir l'exponentielle comme la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Proposition 1.9 (Limites de références de l'exponentielle) :
On a les limites

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démonstration :
Si $x < 0$, on a $xe^x = -e^{x+\ln(-x)} = -e^{x\left(1-\frac{\ln(-x)}{-x}\right)}$. Or on sait maintenant que $\frac{\ln(-x)}{-x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ et donc, par composition et par continuité de l'exponentielle et la caractérisation de la continuité par les limites (voir chap continuité),

$$-e^{x(1-\frac{\ln(-x)}{-x})} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

On procède de la même manière pour l'autre limite :

$$\frac{e^x}{x} = e^{x-\ln(x)} = e^{x(1-\frac{\ln(x)}{x})} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

□

Proposition 1.10 (Inégalité classique de l'exponentielle) :
On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x+1 \leq e^x.$$

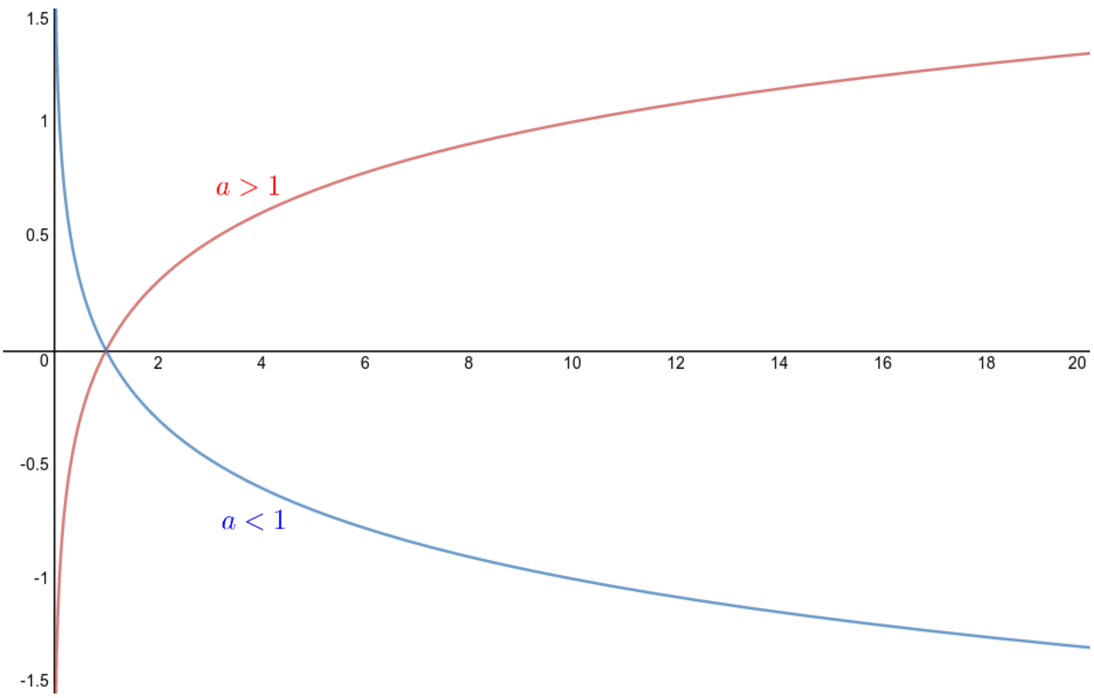
Démonstration :
Soit on étudie la différence, soit on réutilise l'inégalité du log : $\ln(1+x) \leq x \iff 1+x \leq e^x$. $\square$

1.3 Logarithme de base a

Définition 1.4 (Logarithme de base a) :
Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. On appelle logarithme de base a, l'application

$$\log_a : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln x}{\ln a} \end{array}$$

En particulier, $\ln = \log_e$.



On a donc le tableau de variation suivants :

x	0	1	$+\infty$
$\log_a$ $a<1$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$
$\log_a$ $a>1$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Proposition 1.11 :
On a (entre autre), si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,

1. $\forall x, y > 0$, $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a(a) = 1$

Démonstration :
La démonstration est évidente □

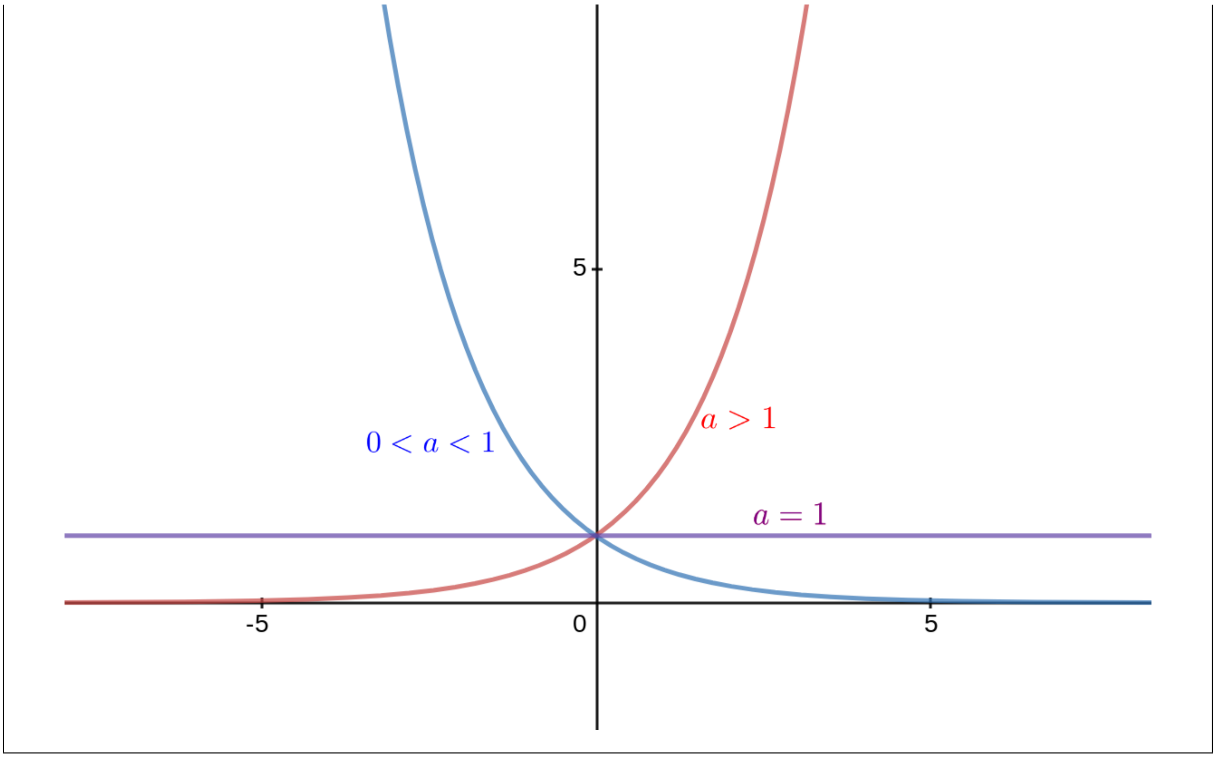
C'est le second point qui justifie le terme de "base a". Bien sûr, on peut dériver d'autres propriétés (notamment analytique) pour le log de base a de celles du log néperien. Le log de base a, n'est que le log néperien à une constante multiplicative près.

1.4 Exponentielle de base a

Définition 1.5 (Exponentielle de base a) :
On appelle exponentielle de base $a > 0$, l'application

$$\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x \ln a} \end{array}$$

En particulier, $\exp = \exp_e$.



On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp_a$ $a < 1$	$+\infty$	1	0
$\exp_a$ $a = 1$	1		1
$\exp_a$ $a > 1$	0	1	$+\infty$

Proposition 1.12 :
Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Alors

$$\exp_a = \log_a^{-1}$$

Démonstration :
Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors

$$y = \log_a(x) \iff \ln(x) = y\ln(a) \iff x = e^{y\ln(a)} = \exp_a(y)$$

$\square$

Remarque :
Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\exp_a(n) = \exp(n\ln(a)) = \exp(\ln(a^n)) = a^n$.
Ceci permet de définir une nouvelle notation pour l'exponentielle de base a.

Définition 1.6 (a^x) :
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on note $a^x = \exp_a(x) = e^{x\ln a}$

Remarque :
C'est une notation. C'est comme cela que l'on définit le a^x que vous connaissez. Mais il faut bien comprendre que, a strictement parlé, 3^π n'a pas de sens. En revanche, $\exp_3(\pi)$, lui a un sens. Et c'est comme cela que l'on définit 3^π.

Ce changement de notation permet de pouvoir manipuler les propriété algébrique de l'exponentielle de base a de façon plus naturelle. Ça permet d'avoir un parallèle de notation entre l'exponentielle de base a et l'exponentielle néperienne.

!!! ATTENTION !!!

⚠ La notation a^x avait déjà un sens dans certains cas. En recollant avec ce que nous venons de voir, le nombre a^x a donc un sens dans les cas suivants :

- $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ via $a^x = \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$
- $a \in \mathbb{R}$ et $x = 0$ via $a^0 = 1$
- $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{N}^*$ via $a^x = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{x \text{ fois}}$
- $a \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{Z}_-^*$ via $a^x = 1/a^{-x}$.

Exemple 1.1 :
Montrer que $\forall a, b, c > 0$, $a^{\log_c(b)} = b^{\log_c(a)}$.

Proposition 1.13 (Propriétés algébriques de l'exponentielle de base a) :
Soit $a, b > 0$. Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

(i) $a^0 = 1$

(ii) $1^x = 1$

(iii) $a^x a^y = a^{x+y}$

(iv) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(v) $(a^x)^y = a^{xy}$

(vi) $(ab)^x = a^x b^x$

(vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Démonstration :
Soit $a, y \in \mathbb{R}$.

(i) $a^0 = \exp_a(0) = e^{0\ln(a)} = e^0 = 1$

(ii) $1^x = \exp_1(x) = e^{x\ln(1)} = e^0 = 1$

(iii) $a^x a^y = e^{x\ln a} e^{y\ln a} = e^{(x+y)\ln a} = a^{x+y}$

(iv) $a^{-x} = e^{-x\ln a} = \frac{1}{e^{x\ln a}} = 1/a^x$

(v) $(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{xy\ln a} = a^{xy}$

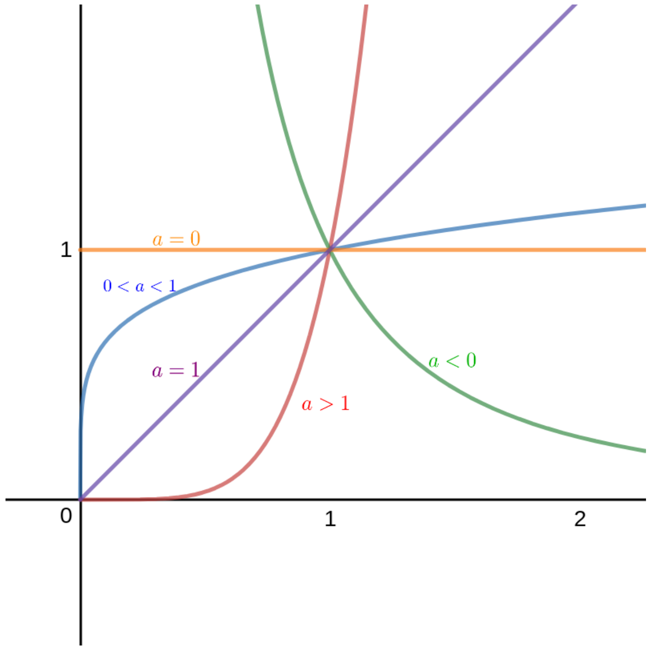
(vi) $(a/b)^x = e^{x\ln(a/b)} = e^{x\ln a}/e^{x\ln b} = a^x/b^x$

$\square$

1.5 Fonctions puissances

Définition 1.7 (Fonctions puissances) :
On appelle fonction puissance d'exposant $a \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a = e^{a\ln x} \end{array}$$



Remarque :
Si $a=0$, la fonction est constante égale à 1.

Si $a=1$, la fonction est l'identité de $\mathbb{R}$.

Ces fonctions ne sont définies que sur $\mathbb{R}_+^*$ car on ne peut pas élever un réel négatif à une puissance quelconque. Un réel négatif ne peut être élevé qu'à une puissance entière (relatif). Par exemple, $(-1)^\pi$ n'a pas de sens. $(-1)^{1/3}$ non plus. En revanche, $(-1)^5$ et $(-1)^{-3}$ en ont un. Ça dépend de la définition utilisée comme indiqué dans le danger précédent.

Proposition 1.14 (Dérivabilité des fonctions puissances) :
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto x^\alpha$ est dérivable (donc continue) sur $]0,+\infty[$ et la dérivée est

$$x\mapsto \alpha x^{\alpha-1}$$

Démonstration :
En utilisant la formule des dérivées composées avec les notations physiques pour plus de praticité :

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha)=\frac{d}{dx}(e^{\alpha\ln x})=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}=\alpha e^{(\alpha-1)\ln x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

$\square$

Proposition 1.15 (Limites) :

- Si $\alpha > 0$, alors
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$$
- Si $\alpha < 0$, alors
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$$

Démonstration :
Supposons $\alpha > 0$. Alors $\alpha\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et donc $x^\alpha = e^{\alpha\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par composition de limites. Et on procède de la même manière pour l'autre limite.

Le cas $\alpha < 0$ se fait de façon tout à fait similaire. $\square$

Remarque :
On pose $0^\alpha = 0$ ce qui permet de prolonger par continuité la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en 0. Les fonctions puissances sont donc définies sur $\mathbb{R}_+$ une fois prolongée par continuité (voir chap continuité) et on a

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\alpha\ln(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Proposition 1.16 (Propriétés algébriques des fonctions puissances) :
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y > 0$. Alors

1. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
2. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
3. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Démonstration :
Ça se démontre exactement comme avant. Exercice. $\square$

Définition 1.8 (Racine n-ème) :
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $x \geq 0$. On définit la racine n-ème de x par

$$\sqrt[n]{x} \overset{\text{def}}{=} x^{1/n} = e^{1/n \ln(x)}$$

Proposition 1.17 :
Soit $n \geq 2$. La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.

Démonstration :
Soit $x, y \geq 0$. On a

$$y = x^n \iff y^{1/n} = x$$

$\square$

Exemple 1.2 :
La fonction racine carré est la fonction $x \mapsto x^{1/2}$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on retrouve :

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Remarque :
Compte tenu du fait que $x \mapsto x^{2q+1}$ est une bijection sur $q \in \mathbb{N}$, alors on peut étendre les fonctions $x \mapsto x^{1/n}$ sur $\mathbb{R}$ si n est impair. Plus précisément, :

$$x \mapsto x^a \text{ est définie sur } \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathbb{Q}_+,\ a = \frac{p}{2q+1},\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } a \in \mathbb{Q}_-^*,\ a = -\frac{p}{2q+1},\ p \in \mathbb{N}^*,\ q \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+ & \text{sinon et si } a > 0 \\ \mathbb{R}_+^* & \text{sinon et si } a < 0 \end{cases}$$

Globalement, les fonctions $x \mapsto x^a$ sont toujours définies sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut les étendre à $\mathbb{R}_+$ sans trop d'efforts. Et dans certains cas, on peut les étendre encore un plus (par exemple si $a = 1/3$ en utilisant la bijectivité de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$).

1.6 Croissances comparées

Les croissances comparées sont toutes les comparaisons des différentes croissances des fonctions de références. Autrement dit, on compare la taille de “chaque infinis” pour déterminer le plus grand et donc la fonction qui crois (ou décroit) plus vite que les autres.

C'est un début pour les croissances comparées. Le reste suivra dans le chapitre d'analyse asymptotique.

Proposition 1.18 (Comparaison $\ln x$ et x en $+\infty$) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Proposition 1.19 (Comparaison $\ln x$ et x^α) :
Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0^-$$

Démonstration :
On pose $y = x^\alpha$. Alors $y \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et par composition dans les limites,

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln(y^{1/\alpha})}{y} = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln y}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0^+$$

On pose maintenant $y = 1/x$ et donc $y \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. Et en composant aussi dans les limites,

$$x^\alpha \ln(x) = \frac{\ln(1/y)}{y^\alpha} = -\frac{\ln y}{y^\alpha} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0^+$$

□

Proposition 1.20 (Comparaison e^x et x^α) :
Soit $\alpha > 0$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0^+$$

Démonstration :
Les transformations sont plus simples :

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = e^{x-\alpha\ln x} = e^{x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

par opérations sur les limites, et

$$x^\alpha e^{-x} = e^{-x+\alpha \ln x} = e^{-x\left(1-\alpha \frac{\ln x}{x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$$

□

Les croissances comparées permettent de déterminer les limites de fonctions compliquées.

Exemple 1.3 :
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x$$

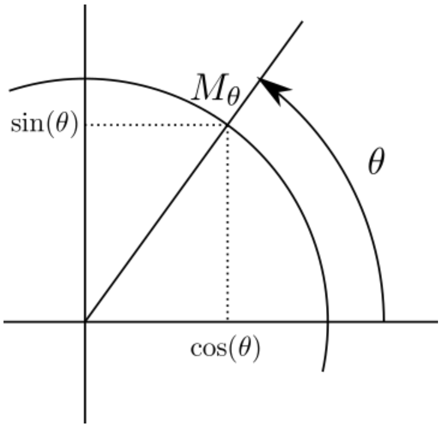
2 Fonctions circulaires

On va redéfinir les célèbres cosinus et sinus.

2.1 Fonctions sinus et cosinus

Définition 2.1 (Sinus et cosinus) :
Soit $t \in \mathbb{R}$ et M_t le point du cercle trigonométrique déterminée par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_t}) \equiv t\ [2\pi]$.

L'abscisse et l'ordonnée du point M_t sont notées $\cos t$ et $\sin t$ respectivement. On définit ainsi deux fonction $\cos$ et $\sin$ de $\mathbb{R}$ vers $[-1, 1]$.



Proposition 2.1 (Propriétés (basiques) de $\cos$ et $\sin$) :
On a les propriétés suivantes :

(i) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$

(ii) $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques

(iii) $\cos$ est paire et $\sin$ est impaire

(iv) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi + t) = -\cos t$ et $\sin(\pi + t) = -\sin t$ (on dit qu'elles sont π-antipériodiques)

(v) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi/2 - t) = \sin(t)$ et $\sin(\pi/2 - t) = \cos(t)$

Démonstration :
Toutes ces propriétés se déduisent facilement de la définition géométrique donnée. Comme M_t est sur le cercle trigonométrique, $OM_t^2 = 1$ et donc $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$.

D'autres part, en vertu du cercle trigonométrique, $M_{t+2\pi} = M_t$ et d'où la 2π-périodicité.

Par symétrie du cercle, $s_{(Ox)}(M_t) = M_{-t}$ donne les parités et l'autre symétrie $s_{(Oy)}(M_t) = M_{\pi-t}$ donne $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$. La symétrie centrale $s_O(M_t) = M_{t+\pi}$ donne $\cos(\pi + t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$.

Enfin, avec Δ : $y = x$ et la symétrie d'axe Δ, on a $s_\Delta(M_t) = M_{\pi/2-t}$ ce qui donne les derniers résultats. $\square$

Proposition 2.2 (Continuité de cosinus et sinus) :
$\cos$ et $\sin$ sont continues en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Par des arguments de géométrie, si $x \in]0, \pi/2[$, on a $0 \leq \frac{\sin(x)}{2} \leq x/2$. Donc $0 \leq \sin(x) \leq x$. Donc $\forall x \in]0, \pi/2[$, $0 \leq \sin(x) \leq x$. Et donc $\forall x \in]-\pi/2, 0[$, $0 \leq \sin(-x) \leq -x$. Et par imparité, $\forall x \in]-\pi/2, 0[$, $0 \geq \sin(x) \geq x$. D'où $\forall x \in]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[$, $0 \leq |\sin(x)| \leq |x|$. Et par théorème des gendarmes, $\sin(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = \sin(0)$. Donc $\sin$ est continue en 0.

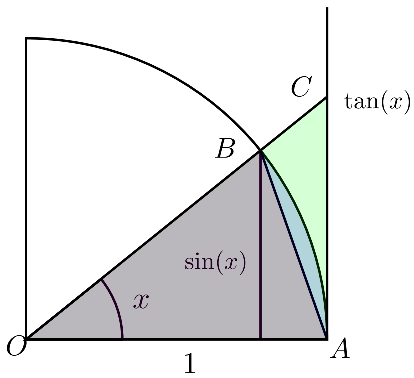
Puis $\forall x \in]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[$, $|\cos(x)| = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$. Et par positivité, $\cos(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

On en déduit la continuité en tout point ensuite en utilisant les formules de trigonométries $\cos(a + h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h)$ et $\sin(a + h) = \sin(a)\cos(h) + \sin(h)\cos(a)$. □

Proposition 2.3 :

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

Démonstration :
C'est de la géométrie.



En prenant un $x \in]0, \pi/2[$, le triangle OAB est d'aire $\frac{\sin(x) \times 1}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$ et le triangle OAC est d'aire $\frac{\tan(x) \times 1}{2}$. Par ailleurs, l'arc $\widehat{OAB}$ est d'aire $\frac{x}{2}$. On a donc l'inégalité $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$. Comme $x \in]0, \pi/2[$, on a donc $\sin(x) > 0$. Et donc $1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$. On a donc

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \ 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

Comme $x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$ et $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ sont paires, on a alors

$$\forall x \in]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[, \ 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

Puis, par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en passant à l'inverse, on a donc

$$\forall x \in]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[, \ \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Or $\cos(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ par continuité de $\cos$ en 0 et par caractérisation de la continuité par les limites, et on conclut par théorème des gendarmes. $\square$

Proposition 2.4 (Dérivabilité) :
Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont (indéfiniment) dérivables avec

$$\cos' = -\sin \qquad \text{et} \qquad \sin' = \cos$$

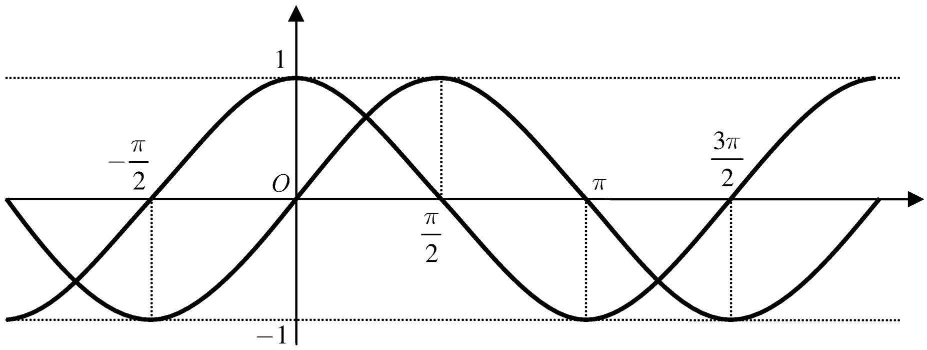
Démonstration :
Il suffit d'utiliser les formules de trigonométries :

$$\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} = -\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}}, \quad \text{et} \quad \frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} = 2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}}$$

$\square$

On a le tableau de valeurs (bien connus) :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1



Il y a bien sûr beaucoup de relations trigonométriques manquantes, mais ne vous inquiétez pas, elles sont plus bas (ouf !).

Proposition 2.5 (Inégalité classique) :
On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|.$$

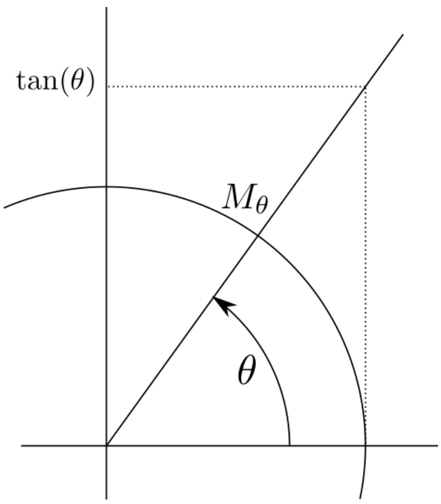
Démonstration :
On pose $f : x \mapsto \sin(x) - x$. Alors si $|x| \geq 1$, on a $|\sin(x)| \leq 1 \leq |x|$. Il reste à étudier l'inégalité sur $[-1, 1]$. f est dérivable sur $[-1, 1]$. Et $\forall x \in [-1, 1]$, $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. Donc f est décroissante sur $[-1, 1]$. Or $f(0) = 0$. Donc $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \leq 0$ et donc $\forall x \in [0, 1]$, $\sin(x) \leq x$. En particulier, $[0, 1] \subset [0, \pi/2]$, donc $\sin$ est positive et donc $\forall x \in [0, 1]$, $|\sin(x)| = \sin(x) \leq x = |x|$.

Puis, $\forall x \in [-1, 0]$, $x \leq \sin(x)$. Comme $[-1, 0] \subset [-\pi/2, 0]$, $\sin$ est négative et donc $\forall x \in [-1, 0]$, $x = -|x| \leq \sin(x) = -|\sin(x)|$.

D'où l'inégalité. □

2.2 Fonction tangente

Définition 2.2 (Tangente) :
La fonction tangente est définie pour $t \not\equiv \pi/2\ [\pi]$ par
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$



De par cette définition, l'ensemble des propriétés de la tangente se déduise de celles du sinnus et du cosinus. Il suffit de bien connaître le $\cos$ et le $\sin$ pour connaître entièrement et complètement $\tan$.

Proposition 2.6 (Propriété de la fonction $\tan$) :
La fonction $\tan$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[$, impaire, π-périodique et indéfiniment dérivable avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, t \not\equiv \pi/2 \ [\pi], \ \tan'(t) = \frac{1}{\cos(t)^2} = 1 + \tan(t)^2$$

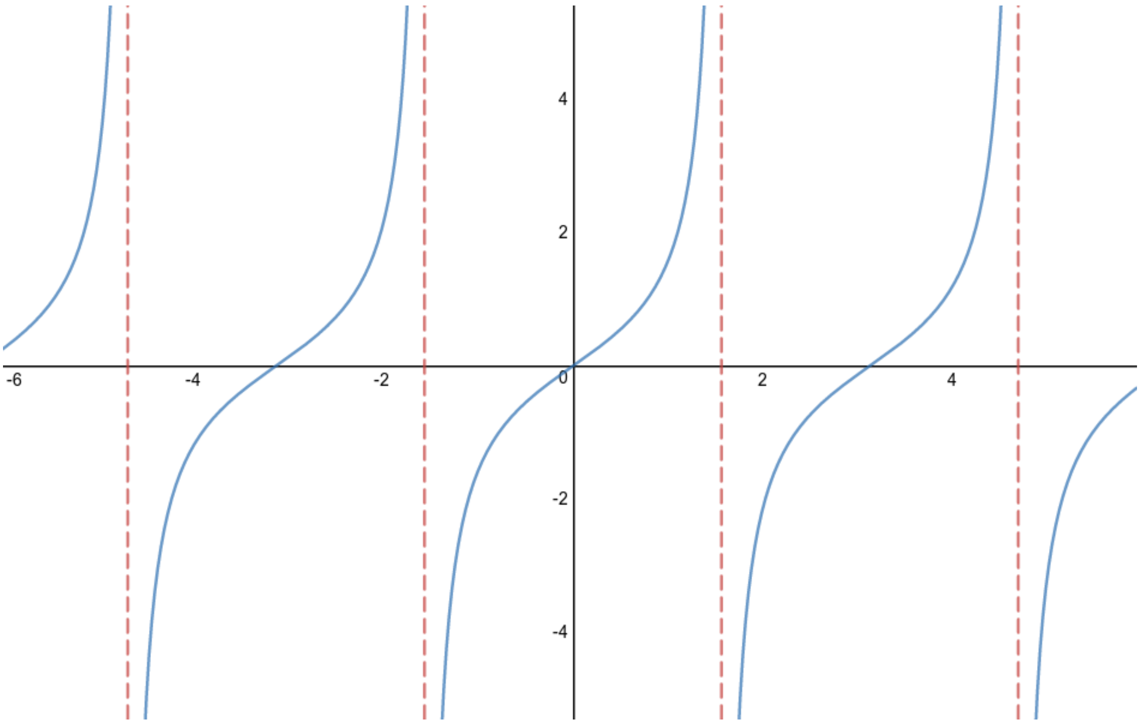
Remarque :
On peut définir aussi la fonction cotangente par

$$\cot(t) = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\tan t}$$

et qui vérifie (entre autre) la relation

$$\cot(t) = \tan(\pi/2 - t)$$

On a alors le graphe



2.3 Trigonométrie

2.3.1 Formules de développement

On a, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

En prenant $a = b$, on obtient

$$\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 = 1 - 2\sin(a)^2$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

On a également, sous réserve d'existence,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}, \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}, \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan(a)^2}$$

2.3.2 Formules de factorisation

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{array}{rr} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b) & \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b) & \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(b)\cos(a) \end{array}$$

et en posant $p = a + b$ et $q = a - b$, on trouve

$$\begin{array}{rr} \cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) & \cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}) \\ \sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) & \sin(p) - \sin(q) = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2}) \end{array}$$

En particulier, avec $p = 0$, on a

$$1 + \cos(x) = 2\cos(x/2)^2 \qquad \text{et} \qquad 1 - \cos(x) = 2\sin(x/2)^2$$

2.3.3 Formules de l'angle moitié

Proposition 2.7 :
Soit $x \not\equiv \pi/2\ [\pi]$. Alors

$$\cos(2x) = \frac{1 - \tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan(x)^2}$$

et si $x \not\equiv \pi/4\ [\pi/2]$, on a

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2}$$

Démonstration :
On a

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{1 + \tan(x)^2}$$

et donc

$$\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1 = \frac{1 - \tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2}$$

Et

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2\tan(x)\cos(x)^2 = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan(x)^2}$$

Et enfin la formule de la tangente est évidente. □

2.3.4 Formules d'Euler

On rappel

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Exemple 2.1 :
Simplifier $\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}$ pour $t \not\equiv 0\ [2\pi]$.

2.3.5 Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R},\ (e^{it})^n = e^{int}$$

ce qui veut dire

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R},\ (\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$$

Exemple 2.2 :
Développer $\cos(3a)$ et $\sin(3a)$ pour $a \in \mathbb{R}$

2.3.6 Applications à la linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique consiste à faire disparaître les produits des fonctions cosinus et sinus. Pour cela :

- On réécrit les cosinus et les sinus à l'aide des formules d'Euler avec les exponentielles complexes
- On développe les produits
- On recombine les termes obtenus en cosinus et sinus

Exemple 2.3 :
Linéariser $\cos(t)^4$

2.4 Équations trigonométriques

Pour $x, \theta \in \mathbb{R}$, on a les solutions aux équations

$$\cos x = \cos\theta \iff \begin{cases} x \equiv \theta \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\theta \ [2\pi] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sin\theta \iff \begin{cases} x \equiv \theta \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

et bien sûr

$$\tan x = \tan\theta \iff x \equiv \theta \ [\pi]$$

Exemple 2.4 :
Résoudre l'équation $\cos(x) = \sin(3x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis $2\cos(x)^2 + \sin(x) = 1$.

On peut aussi transformer $a\cos(x) + b\sin(x)$ sous la forme $A\cos(x - \phi)$ avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\phi \in \mathbb{R}$ bien choisi.

Exemple 2.5 :
Résoudre l'équation $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}/2$ puis $\sqrt{3}\cos(2x) - 2\sin(x)\cos(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3 Fonctions circulaires réciproques

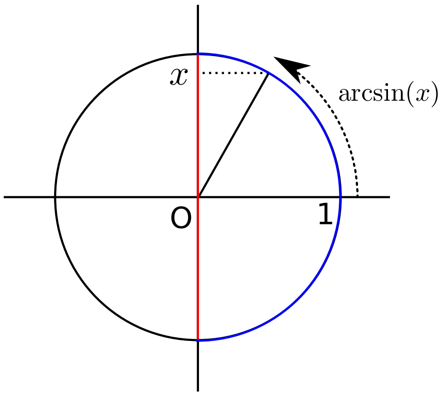
3.1 Fonction $\arcsin$

La fonction sinus est continue est strictement croissante de l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Elle réalise donc une bijection du premier intervalle sur le second (voir chap continuité). Autrement dit

$$\forall x \in [-1, 1], \ \exists! t \in [-\pi/2, \pi/2], \ \sin(t) = x$$

Elle admet donc une réciproque.

Définition 3.1 ($\arcsin$) :
Pour tout $x \in [-1, 1]$, on note $\arcsin(x)$ l'unique angle de l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus vaut x. Ceci définit une application $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ qui est la bijection réciproque de la restriction $\sin\Big|_{[-\pi/2,\pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$



On a donc le tableau de valeur

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Remarque :
On a bien sûr aussi
$$\forall t \in [-\pi/2, \pi/2],\ \arcsin(\sin(t)) = t$$
puisque le seul angle de $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus vaut $\sin(t)$ est t.

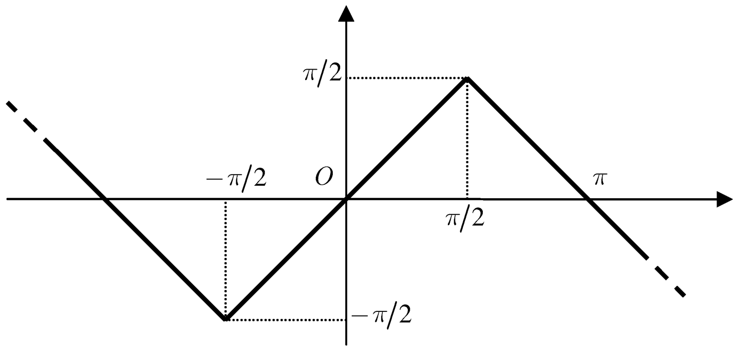
ATTENTION ! ! Cette formule n'est valable QUE dans $[-\pi/2, \pi/2]$. Le problème vient de la définition de $\arcsin$

Exemple 3.1 :
Simplifier $\arcsin(\sin(2\pi/3))$.

Exemple 3.2 :
Étudier la fonction $f : t \mapsto \arcsin(\sin(t))$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Sur $[0, \pi/2]$, $f(t) = t$ car on peut simplifier $f(t)$ sur cet intervalle. Mais pour $t \in [\pi/2, \pi]$, $\sin(t) = \sin(\pi - t)$ avec $\pi - t \in [0, \pi/2] \subset [-\pi/2, \pi/2]$, donc $f(t) = \pi - t$. On en conclut donc l'allure de la fonction :



!!! ATTENTION !!!

⚠ La fonction arcsin n'est PAS la réciproque du sinus. Le sinus n'est pas bijectif. Mais :

$$\arcsin = \left(\sin\Big|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1}.$$

Proposition 3.1 (Relations fonctionnelles) :
Soit $x \in [-1, 1]$. On a les relations

$$\sin(\arcsin(x)) = x\,, \qquad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

et pour $x \in]-1, 1[$,

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration :
Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$. Par définition, $\sin(\theta) = x$. D'où la première relation.

Puis $\cos(\theta)^2 = 1 - \sin(\theta)^2 = 1 - x^2$. Mais comme $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos(\theta) \geq 0$ et donc $\cos(\arcsin(x)) = \cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$.

Et pour la dernière relation,

$$\tan(\arcsin(x)) = \tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

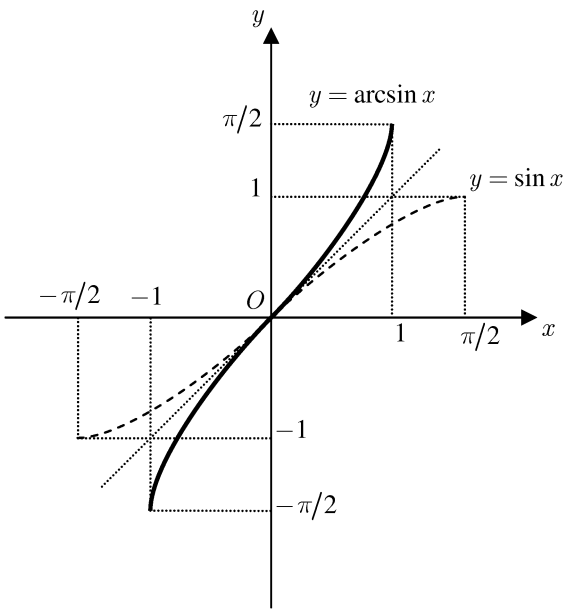
Exemple 3.3 :
Résoudre l'équation

$$\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \pi/2$$

d'inconnue $x \in [-1/2, 1/2]$

Théorème 3.2 (Propriétés analytiques de $\arcsin$) :
La fonction $\arcsin$ est impaire, strictement croissante, continue sur $[-1, 1]$ et infiniment dérivable sur $]-1, 1[$ avec

$$\forall x \in]-1, 1[\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



La fonction $\arcsin$ présente des asymptote verticale en -1 et 1.

On a bien sûr le tableau de variations :

x	-1		0		1
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\Vert$		$+$		$\Vert$
$\arcsin$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Démonstration :
La fonction $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ est une bijection continue, impaire, strictement croissante. Donc sa bijection réciproque $\arcsin$ a les mêmes propriétés.

La fonction $\sin$ est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et $\forall t \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\sin'(t) = \cos(t) \neq 0$. Donc la fonction $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$, donc la fonction $\arcsin$ l'est également. $\square$

La fonction $\arcsin$ n'est PAS dérivable en -1 et 1 ! Les tangentes de l'arcsin en -1 et 1 sont verticales.

Exemple 3.4 :
On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(\sqrt{x}) + \arcsin(\sqrt{1-x})$. Étudier la fonction f.

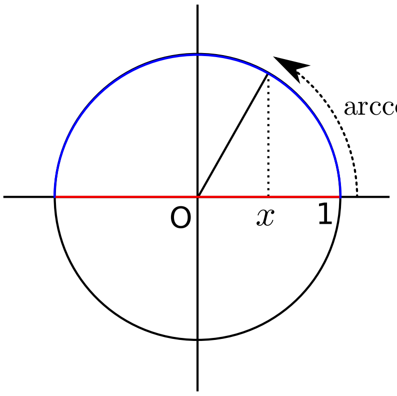
3.2 Fonction $\arccos$

La fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$. Elle réalise donc une bijection sur ces intervalles (cf chap continuité) et

$$\forall x \in [-1, 1],\ \exists! t \in [0, \pi],\ \cos(t) = x$$

Elle admet donc une réciproque :

Définition 3.2 ($\arccos$) :
Pour tout $x \in [-1,1]$, on note $\arccos(x)$ l'unique angle de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.
Ceci définit une application $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ qui est la bijection réciproque de la restriction $\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$.



On a donc le tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Remarque :
On a bien sûr, $\forall t \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos(t)) = t$.
Attention ! ! Cette formule n'est valable QUE sur $[0,\pi]$.

!!! ATTENTION !!!

La fonction $\arccos$ n'est PAS la réciproque du cosinus, puisque le cosinus n'est pas bijectif.
Mais :

$$\arccos = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$

Exemple 3.5 :
Calculer $\arccos(\cos(t))$ pour $t \in [-\pi,0]$ puis $t \in [\pi,2\pi]$.

Proposition 3.3 (Relations fonctionnelles) :
Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a les simplifications :

$$\cos(\arccos(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

et pour $x \neq 0$,

$$\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Démonstration :
Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arccos(x)$. Par définition, $\theta \in [0, \pi]$ et $\cos(\theta) = x$. D'où la première relation.

Puisque $\sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = 1 - x^2$ et que $\sin(\theta) \geq 0$ car $\theta \in [0, \pi]$, on on obtient donc $\sin(\theta) = \sqrt{1 - x^2}$.

Finalement, pour $x \neq 0$,

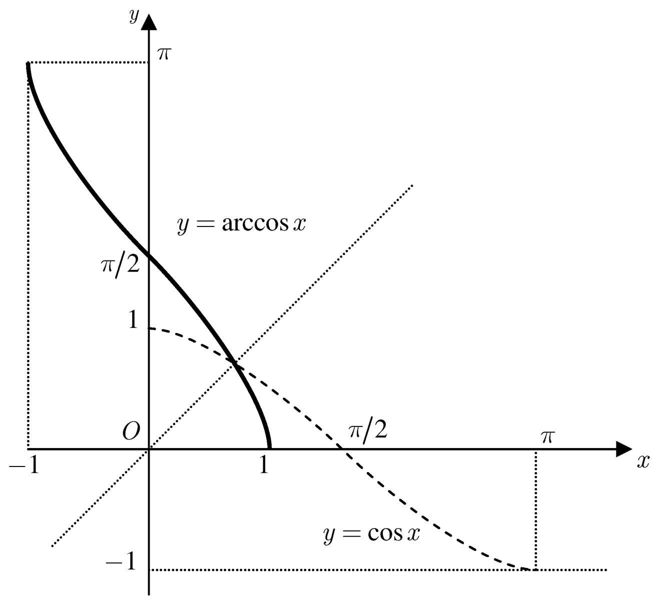
$$\tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

□

Exemple 3.6 :
Résoudre l'équation $\arccos(x) - \arcsin(x) = 0$.

Théorème 3.4 (Propriété analytiques de $\arccos$) :
La fonction $\arccos$ est strictement décroissante, continue sur $[-1,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ avec

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



La fonction $\arccos$ admet des asymptotes verticales en -1 et 1.

On aussi facilement le tableau de variations

x	-1		0		1
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	||		$-$		||
$\arccos$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Démonstration :
La fonction $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est une bijection continue et strictement décroissante. Il en est donc de même pour sa réciproque $\arccos$.

La fonction $\cos$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et $\forall t \in]0,\pi[,\ \cos'(t) = -\sin(t) \neq 0$. Donc $\arccos$ est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = \frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Finalement, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$. Et donc $\arccos$ aussi. $\square$

Exemple 3.7 :
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \arccos(\sqrt{x}) + \arccos(\sqrt{1-x})$.

Proposition 3.5 (Lien fonctionnel entre $\arccos$ et $\arcsin$) :
$\forall x \in [-1,1]$,
$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration :
Soit $x \in [-1,1]$. On pose $t = \pi/2 - \arcsin(x)$. Alors $t \in [0,\pi]$ et
$$\cos(t) = \cos(\pi/2 - \arcsin(x)) = \sin(\arcsin(x)) = x$$
Donc $t = \arccos(x)$. $\square$

Exemple 3.8 :
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in [-1,1]$
$$\arcsin(x) - \arccos(x) = \pi/6$$

Exemple 3.9 :
Étudier la fonction $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$.

3.3 Fonction $\arctan$

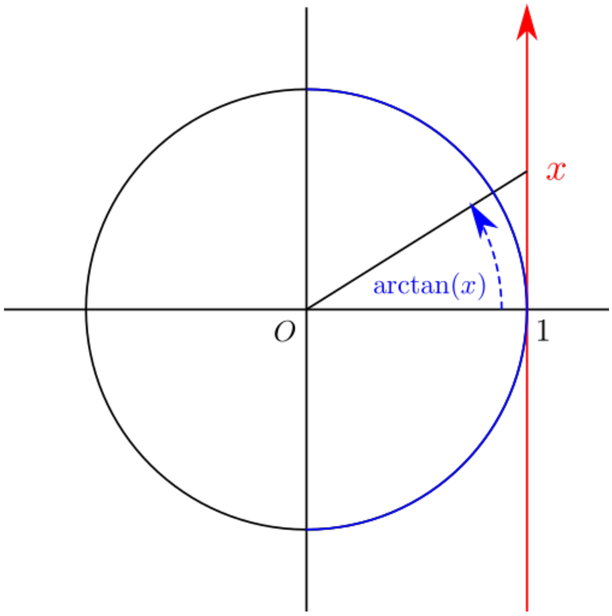
La fonction tangente est continue est strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection entre ces intervalles et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! t \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \tan(t) = x$$

Elle admet donc une réciproque.

Définition 3.3 $(\arctan)$:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\arctan(x)$ l'unique angle de $]-\pi/2, \pi/2[$ dont la tangente vaut x.

On peut donc définir une application $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ qui est la bijection réciproque de la restriction $\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[} :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$.



!!! ATTENTION !!!

La fonction $\arctan$ n'a RIEN à voir avec le rapport $\frac{\arcsin}{\arccos}$. C'est beaucoup plus compliqué que ça.

On a le tableur de valeurs

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Remarque :
On a bien sûr aussi, $\forall t \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\arctan(\tan(t)) = t$.
Attention ! ! Ceci n'est valable QUE pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

!!! ATTENTION !!!

La fonction $\arctan$ n'est PAS la réciproque de la tangente, puisque la tangente n'est pas bijectif. Mais

$$\arctan = \left(\tan\Big|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1}.$$

Exemple 3.10 :
Simplifier $\arctan(\tan(t))$ pour $t \in]\pi/2, 3\pi/2[$.

Proposition 3.6 (Relations fonctionnelles) :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les simplifications

$$\tan(\arctan(x)) = x, \qquad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Démonstration :
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\theta = \arctan(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Alors $\tan(\theta) = x$. Ce qui nous donne la première relation.

On a aussi $\cos(\theta)^2 = \frac{1}{1+\tan(\theta)^2} = \frac{1}{1+x^2}$. Mais $\cos\theta > 0$ et donc

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

On a aussi

$$\tan(\arctan(x)) = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))} = x$$

ce qui nous donne

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

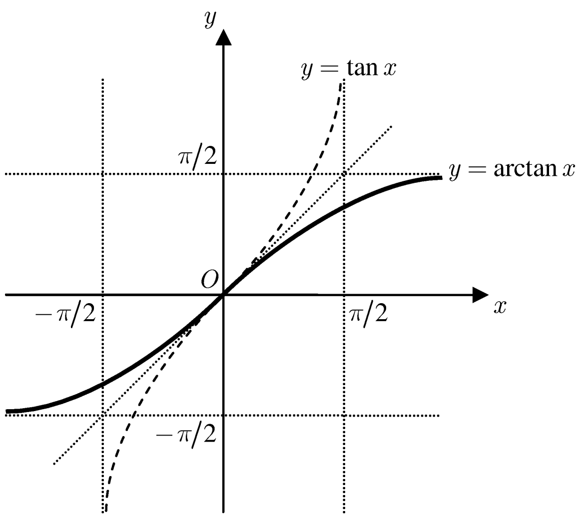
□

Remarque :
On aurait pu aussi déterminer l'expression de $\sin(\arctan(x))$ en procédant comme pour $\cos(\arctan(x))$ et en faisant une petite étude de signe.

Exemple 3.11 :
Calculer $\theta = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$.

Théorème 3.7 (Propriétés analytiques de $\arctan$) :
La fonction $\arctan$ est impaire, strictement croissante, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



et $\arctan$ admet des asymptotes horizontale d'équation $y = -\pi/2$ en $-\infty$ et $y = \pi/2$ en $+\infty$.

Là encore, on a le tableau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{1+x^2}$	0		$+$		0
arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Démonstration :
La bijection $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est continue, impaire et strictement croissante. Donc $\arctan$ aussi.

La fonction $\tan$ est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et $\forall t \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan'(t) = 1 + \tan(t)^2 \neq 0$. Donc $\arctan$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Finalement, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est indéfiniment dérivable et donc $\arctan$ aussi.

Quand aux limites, on prend $x > 1$. Comme la tangente est une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $\mathbb{R}$, $\exists! y \in \mathbb{R}$ tel que $x = \tan(y)$. Et $x \to +\infty \iff y \to \pi/2$. Via ce changement de variable, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \lim_{y\to\pi/2} \arctan(\tan(y)) = \lim_{y\to\pi/2} y = \pi/2$$

On opère de la même manière en $-\infty$. $\square$

Proposition 3.8 (Équation fonctionnelle de l'arctan) :
Soit $x \neq 0$. On a

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration :
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonction dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1/x^2}{1+1/x^2} = 0$$

Donc la fonction f est constante sur chacun des deux intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Puis $f(1) = 2\arctan(1) = \pi/2$ et l'imparité (ou $f(-1)$) nous donne le résultat. $\square$

Exemple 3.12 :
Résoudre l'équation

$$\arctan(x) = \arctan(1/x).$$

4 Fonctions hyperboliques

4.1 Cosinus et sinus hyperbolique

Définition 4.1 (Cosinus et Sinus hyperbolique) :
On définit le cosinus hyperbolique et la fonction sinus hyperbolique par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Théorème 4.1 (Propriétés analytiques de ch et sh) :
Les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(t) = \mathrm{ch}(t) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}'(t) = \mathrm{sh}(t)$$

et les tableaux de variations

t	$-\infty$		0		$+\infty$
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

et ch est paire et sh est impaire.

Démonstration :
On va commencer par la parité, c'est le plis simple. Soit donc $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{ch}(-t) = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \mathrm{ch}(t) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(-t) = \frac{e^{-t} - e^t}{2} = -\,\mathrm{sh}(t)$$

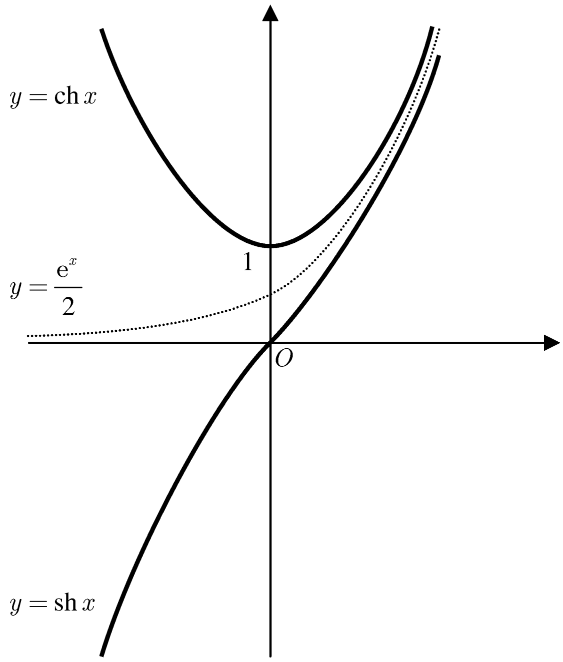
Par opérations sur les fonctions, les fonctions ch et sh sont indéfiniment dérivables (combinaisons linéaires de fonctions qui le sont). Et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \mathrm{sh}(t) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}'(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \mathrm{ch}(t)$$

La positivité de la fonction ch donne la croissance de sh. Et $\mathrm{sh}(0) = 0$ nous donne alors le signe de sh et donc les variations de ch.

Finalement, les limites ne sont pas très dures. □

Remarque :
La fonction ch admet un minimum en 0 qui vaut 1 : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) \geq 1$.



4.2 Trigonométrie Hyperbolique

Théorème 4.2 :
$\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t)^2 - \mathrm{sh}(t)^2 = 1$

Démonstration :
Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(t)^2 - \mathrm{sh}(t)^2 = (\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t))(\mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t)) = e^t e^{-t} = 1$$

□

Corollaire 4.3 :
$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(t) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}(t)^2}$$

Démonstration :
C'est immédiat avec ce qui précède et sachant que ch est positive. □

À l'instar de la trigonométrie circulaire, on peut établir tout un tas de formules de trigonométrie hyperbolique. Mais seule la relation précédente est au programme. Il peut être utile, toutefois, de les avoir vu au moins une fois et de savoir les démontrer pour pouvoir les utiliser si besoins.

Propriété (HP) 4.4 (*Premières formules de trigonométrie hyperbolique*)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \qquad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \qquad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$$

$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}(a)^2 + \operatorname{sh}(a)^2 = 2\operatorname{ch}(a)^2 - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}(a)^2 \qquad \operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(a)$$

Démonstration :
Laissée en exercice. C'est pas très dur. □

Bien entendu, on peut en faire beaucoup plus. Chaque formule de trigonométrie classique à sa version en trigonométrie hyperbolique.

Exemple 4.1 :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(a + kb)$$

4.3 Tangente hyperbolique

Définition 4.2 (Tangente hyperbolique) :
On définit la tangente hyperbolique, notée th par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Proposition 4.5 (Propriétés analytiques de th) :
La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$, continue et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2$$

De plus, elle vérifie les relations :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

La fonction th est impaire et on a le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	-1	0	1

Démonstration :
Tout d'abord, on sait que $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$. Et sh est également définie sur $\mathbb{R}$. Donc par quotient d'applications définie sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, th est bien définie sur $\mathbb{R}$.

On remarque alors :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) &= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \\
&= \frac{2\,\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)} \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} && \text{def } \mathrm{ch},\ \mathrm{sh} \\
&= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} && \text{car } e^x \neq 0 \\
&= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} && \text{car } e^{-x} \neq 0
\end{aligned}$$

De même, par quotient d'applications continues et infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, th est continue et infiniment dérivable. Et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2} = 1 - \frac{\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2} = 1 - \operatorname{th}(x)^2$$

On en déduit les variations de th. De plus,

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$$

par quotient de fonctions convergentes en $-\infty$ dont le dénominateur ne tend pas vers 0. De même, on trouve $\operatorname{th}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ (ce qu'on aurait pu déduire de l'imparité de th si on avait commencé par ça).

Enfin,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = -\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x)$$

par imparité de sh et parité de ch. Donc th est impaire. □

4.4 Fonctions hyperboliques réciproques

Il est facile de montrer que sh, $\operatorname{ch}\big|_{\mathbb{R}_+}$ et th sont bijectives (particulièrement avec le chapitre sur la continuité et le lien entre les croissances strictes et l'injectivité). Elles admettent donc des réciproques qui sont respectivement notées argsh, argch et argth.

C'est un exercice classique (qu'il faut savoir faire rapidement) d'étudier ces fonctions et de trouver une expression de ces fonctions à l'aide des fonctions de références. Il est largement recommandé et conseillé de s'entraîner à le faire.