



Chapitre 8 - TD

Groupes - Anneaux - Corps

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

12 novembre 2024

1 Groupes

Exercice 1 (Loi de composition) :

On définit une loi de composition interne sur \mathbb{R} par

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \star b = \ln(e^a + e^b).$$

Quelle sont les propriétés de cette loi (associativité, commutativité) ? Y a-t-il un élément neutre ?

Exercice 2 :

Dire si les ensembles suivants sont des groupes ou non :

1. L'ensemble des bijections continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de la loi \circ
2. L'ensemble des bijections dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de la loi \circ
3. $\{a + \omega b, a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ muni de la loi $+$
4. $\{a^n, n \in \mathbb{Z}\}, a \in \mathbb{C}^*$, muni de \times
5. $\{f_{a,b} : z \mapsto az + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$ muni de \circ

Exercice 3 :

Déterminer si les ensembles H suivants sont des sous-groupes du groupe G :

1. $G = (\mathbb{Z}, +)$, H est l'ensemble des nombres pairs
2. $G = (\mathbb{Z}, +)$, H est l'ensemble des nombres impairs
3. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = [-1, +\infty[$
4. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, $H = \mathbb{Q}^*$
5. $G = (\mathcal{S}(E), \circ)$, $H = \{f \in \mathcal{S}(E), f(x_0) = x_0\}$ où E est un ensemble non vide et $x_0 \in E$ fixé.
6. $G = (\mathcal{S}(E), \circ)$, $H = \{f \in \mathcal{S}(E), f(x_0) = y_0\}$ où E est un ensemble non vide et $x_0, y_0 \in E$ fixés avec $x_0 \neq y_0$.

Exercice 4 (Partie stable) :

On pose,

$$\forall x, y \in [0, 1], x \star y = x + y - xy$$

1. Montrer que \star est une LCI sur $[0, 1]$.
2. \star est-elle commutative ? Associative ?

3. Existe-t-il un élément neutre? Quels sont les éléments symétrisables?
4. Montrer que $\forall a \in [0, 1], E_a = [a, 1]$ est une partie stable.

Exercice 5 ()** :

Soit E un ensemble muni d'une LCI \star associative. On suppose $\exists a \in E$ tel que $f : E \rightarrow E$ définie par $f(x) = a \star x \star a$ est surjective. On note b un antécédent de a par f .

1. Montrer $e = a \star b$ est un élément neutre à gauche et $e' = b \star a$ est élément neutre à droite pour \star . En déduire que $e = e'$.
2. Montrer que a est symétrisable et que f est bijective.

Exercice 6 (Caractérisation de la symétrisabilité par la bijectivité) :

Soit E un ensemble muni d'une LCI \star associative et d'un élément neutre e .

Montrer que $a \in E$ est symétrisable pour \star si, et seulement si, $f : x \mapsto a \star x$ est bijective.

Exercice 7 (Commutativité forcée) :

Soit (G, \times) un groupe notée multiplicativement et e l'élément neutre. On suppose que $\forall x \in G, x^2 = e$.

1. Montrer que G est un groupe abélien.
2. Soit $a \in G, a \neq e$. On définit la relation \sim sur G par

$$\forall x, y \in G, x \sim y \iff (x = y \text{ ou } x = ay)$$

Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur G . Montrer que toutes les classes d'équivalences contiennent deux éléments.

3. On définit une relation \star sur l'ensemble $\text{Cl}(G) = \{\text{Cl}(x), x \in G\} \subset \mathcal{P}(G)$ des classes d'équivalences par

$$\forall x, y \in G, \text{Cl}(x) \star \text{Cl}(y) = \text{Cl}(xy).$$

Montrer que $(\text{Cl}(G), \star)$ est un groupe abélien dans lequel chaque élément est son propre symétrique.

4. On suppose que G est fini. Montrer que le nombre d'éléments de G est une puissance de 2.

Exercice 8 (*) Transport de loi)** :

Soit (G, \star) un groupe et E un ensemble. Soit $\varphi : G \rightarrow E$ bijective. On définit la loi \diamond sur E par

$$\forall x, y \in E, x \diamond y = \varphi \left(\varphi^{-1}(x) \star \varphi^{-1}(y) \right).$$

Montrer que (E, \diamond) est un groupe.

Exercice 9 (Addition des vitesses en théorie de la relativité) :

Soit $c > 0$. On pose $I =]-c, c[$. On pose

$$\forall x, y \in I, x \star y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{c^2}}.$$

Montrer que (I, \star) est un groupe abélien.

Si c est la vitesse de la lumière, cette loi correspond à l'addition des vitesses portées par un même axes en théorie de la relativité.

Exercice 10 (Produit cartésien de groupes) :

Soit (G, \star) et (H, Δ) deux groupes. Montrer que si on munit $G \times H$ de la LCI

$$(g, h) \diamond (g', h') = (g \star g', h \Delta h')$$

$G \times H$ devient alors un groupe.

Exercice 11 (Produit idempotent) :

Soit G un groupe noté multiplicativement et e sont élément neutre. Soit $a, b \in G$.

Montrer

$$(ab)^n = e \implies (ba)^n = e$$

Exercice 12 () Translations surjectives) :**

Soit G un ensemble non vide muni d'une LCI associative \star telle que

$$\forall a, b \in G, \exists x, y \in G, a = x \star b = b \star y.$$

Montrer que (G, \star) est une groupe.

Exercice 13 (Sous-groupes emboîtés) :

Soit (G, \star) un groupe. Pour H et K deux sous-groupes de G , on note $H \star K = \{h \star k, (h, k) \in H \times K\}$.

Soit H, K, L trois sous-groupes de G tels que $H \subset K$, $H \cap L = K \cap L$ et $H \star L = K \star L$.

Montrer que $H = K$.

Exercice 14 (Sous-groupes des racines de l'unité) :

Montrer que

$$\mathbb{V} = \{z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}$$

est un groupe multiplicatif.

Exercice 15 (Exemple de groupe) :

On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et on définit les applications

$$i(x) = x, f(x) = 1 - x, g(x) = \frac{1}{x}, h(x) = \frac{x}{x-1}, k(x) = \frac{x-1}{x}, \ell(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Montrer que ces applications sont des bijections sur E et que $G = \{i, h, g, h, k, \ell\}$ est un groupe non abélien pour la composition.

Exercice 16 (*) Sous-groupe de \mathbb{R}^*) :

Montrer que

$$G = \{x + y\sqrt{3}, x, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$$

est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) .

Exercice 17 (Produit de sous-groupe) :

Soit G un groupe noté multiplicativement et H et K deux sous-groupes de G . On note

$$HK = \{hk, (h, k) \in H \times K\} \quad \text{et} \quad KH = \{kh, (h, k) \in H \times K\}.$$

Montrer que

$$HK \text{ sous-groupe } G \iff KH \subset HK$$

puis que dans ce cas, $HK = KH$.

Exercice 18 (Caractérisation des groupes abélien [✓]) :

Soit G un groupe noté multiplicativement et e son élément neutre.

- Montrer qu'on a équivalence entre :
 - G est abélien
 - $\forall a, b \in G, (ab)^2 = a^2b^2$
 - $\forall a, b \in G, (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
- En déduire que si $\forall x \in G, x^2 = e$, alors G est abélien.

Exercice 19 (Automorphisme intérieur [✓]) :

Soit (G, \times) un groupe. On note :

$$\forall a \in G, \tau_a : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & axa^{-1} \end{array}$$

- Montrer que τ_a est un morphisme de groupe.
- Montrer que $\forall a, b \in G, \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
- Montrer que $\forall a \in G, \tau_a$ est bijective et déterminer sa réciproque.
- En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a, a \in G\}$ est un groupe pour la loi \circ .

Exercice 20 :

Montrer :

- $\{\frac{a}{b^k}, a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{R} , où $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$.
- [Bonus : arithmétique] Si $a, b \in \mathbb{R}^*, a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ap + bq, p, q \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans \mathbb{R} si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 21 :

Déterminer les homomorphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même. Lesquels sont injectifs ? Surjectifs ?

Exercice 22 :

Montrer qu'il n'existe pas de morphismes de groupes surjectifs de $(\mathbb{Q}, +)$ dans (\mathbb{Q}_+^*, \times) .

Exercice 23 (Groupes des automorphismes) :

Soit G un groupe multiplicatif. On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G .

- Montrer que $\text{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi \circ
- Déterminer $\text{Aut}(\mathbb{Z})$.
- Pour $a \in G$, on note $\varphi_a : G \rightarrow G$ définie par $\varphi_a(g) = aga^{-1}$. Montrer que $\varphi_a \in \text{Aut}(G)$ et que $a \mapsto \varphi_a$ est un morphisme de groupes.
- L'application $\varphi : a \mapsto \varphi_a$ est-il surjectif ? A quelle condition est-il injectif ?

2 Anneaux

Exercice 24 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

Montrer que si $a \in A$ est inversible à droite et à gauche, alors $a \in A^\times$.

Exercice 25 (Entier de Gauss $[\sqrt{\cdot}]$) :

On pose

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
2. Justifier que $\forall a \in \mathbb{Q}, [a - 1/2, a + 1/2] \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$.
3. Soit $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ avec $v \neq 0$. Montrer que $\exists q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$. A-t-on unicité ?
4. On pose $\forall z \in \mathbb{Z}[i], N(z) = |z|^2$. Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
5. Un élément $a \in \mathbb{Z}[i]$ est dit *irréductible* si : $(\exists u, v \in \mathbb{Z}[i], a = uv \implies u \in \mathbb{Z}[i]^\times \text{ ou } v \in \mathbb{Z}[i]^\times)$.
Montrer que 2 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
6. On définit les rationnels de Gauss comme l'ensemble des complexes à coordonnées rationnelles : $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un corps.

Exercice 26 :

On pose

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } \exists a, b \in \mathbb{Z}, x = a + b\sqrt{2}\}.$$

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, l'écriture précédente est unique.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un anneau.
3. Pour $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $n(x) = a^2 - 2b^2$. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], n(xy) = n(x)n(y)$.
4. (a) Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible si, et seulement si, $n(x) \in \{-1, 1\}$.
(b) Montrer que $1 + \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} - 1$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
(c) Montrer qu'il n'existe aucun élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $]1, 1 + \sqrt{2}[$.
(d) Montrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ strictement supérieurs à 1 inversibles sont exactement les nombres de la forme $(1 + \sqrt{2})^n, n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans \mathbb{R} .
6. En déduire qu'entre π et $\pi + 10^{-9}$, il y a un élément de la forme $p + \sqrt{2}q$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$.

Exercice 27 (Anneau de Boole) :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau de Boole¹, c'est-à-dire un anneau tel que $\forall x \in A, x^2 = x$.

1. Montrer que $\forall x \in A, 2x = 0_A$. En déduire que A est un anneau commutatif.
2. Montrer que l'on définit une relation d'ordre \preceq sur A on posant

$$x \preceq y \iff xy = x$$

Exercice 28 (Anneau de sous-parties) :

Soit E un ensemble. On définit la différence symétrique sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.

Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

1. On notera que l'anneau de l'exercice 28 est un exemple non trivial d'anneau de Boole

Exercice 29 (Nilpotent dans un anneau) :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.

Soit $x, y \in A$.

1. Montrer que si x est nilpotent et x et y commutent, alors xy est nilpotent.
2. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.
3. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est aussi nilpotent.
4. Montrer que si x est nilpotent, alors $1_A - x$ est inversible et préciser $(1_A - x)^{-1}$.

Exercice 30 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soit $a, b \in A$.

Montrer que si $1_A - ab$ est inversible, alors $1_A - ba$ l'est aussi.

Exercice 31 (Caractéristique d'un anneau) :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On appelle *caractéristique de A* l'ordre de 1 dans $(A, +)$, s'il existe et on dit que A est de caractéristique 0 sinon.

On suppose que A est de caractéristique $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall x \in A, nx = 0_A$.
2. Montrer que si A est intègre, alors n est nombre premier.

Exercice 32 :

Soit $(A, +, \times)$ et (B, \oplus, \otimes) deux anneaux et $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneau.

1. Montrer que si f est surjective, alors $f(A^\times) = B^\times$.
2. Que penser de la réciproque ?

3 Corps

Exercice 33 :

On pose

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \oplus b = a + b - 1 \quad \text{et} \quad a \odot b = ab - a - b + 2.$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ est un corps.

Exercice 34 (Produit cartésien) :

Soit $(A, +, \times)$ et (B, \oplus, \odot) deux anneaux.

1. Montrer qu'en munissant $A \times B$ des lois

$$(a, b) \boxplus (a', b') = (a + a', b \oplus b') \quad \text{et} \quad (a, b) \boxtimes (a', b') = (aa', b \odot b')$$

$A \times B$ devient un anneau.

2. Si A et B sont des corps, en est-il de même pour $A \times B$?

Exercice 35 :

Soit $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que F est un sous-corps de \mathbb{R} .