Chapitre 13 - TD :
Dérivabilité

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

17 décembre 2024

1 Généralités

Exercice 1 ([✓]) :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0,1/2] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

À quelle(s) condition(s) la fonction g est-elle continue ? Dérivable ?

Exercice 2 :
Étudier les fonctions suivantes au point indiqué :

1. $f_1(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, en 0.
2. $f_2(x) = x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, en 0.
3. $f_3(x) = \begin{cases} 1 - e^x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & x > 0 \end{cases}$, en 0.
4. $f_4(x) = \frac{|x|}{(1+|1-x^2|)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, en 0 et en ± 1.

Exercice 3 :
Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné leur ensemble de dérivabilité :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos(x)+2)^4}$$

$$f_4 : x \mapsto x^x \qquad f_5 : x \mapsto (\operatorname{ch} x)^x \qquad f_6 : x \mapsto \ln|x|$$

Exercice 4 :
Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \arctan(e^x), \qquad f_2(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)), \qquad f_3(x) = \arctan(\operatorname{th}(x/2))$$

Donner alors des relations entre f_1, f_2 et f_3.

Exercice 5 :
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions

$$f_\lambda \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+\lambda}{x^2+1} \end{array}$$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 sont concourantes.
3. Étudier les extremums de la fonction f_λ.
4. (bonus) Déterminer les coordonnées du maximum et minimum de f_λ. Trouver alors une fonction g telle que $(x, g(x))$ correspondent au maximum de f si $x \geq 0$ et $(x, g(x))$ soit le minimum de f_λ si $x \leq 0$.

Exercice 6 ([✓]) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

Exercice 7 :
Calculer les dérivées n-ème des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{llllll} f_1 & : \ x \mapsto x^2(1+x)^n & f_2 & : \ x \mapsto (x^2+1)e^x & f_3 & : \ x \mapsto (2x^2 - x - 2)\ln(x) \\ f_4 & : \ x \mapsto \frac{1}{1-x} & f_5 & : \ x \mapsto \frac{1}{1+x} & f_6 & : \ x \mapsto \cos(x)^3 \end{array}$$

Exercice 8 :
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x|x| \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$$

Montrer que ces fonctions sont bijectives sur $\mathbb{R}$. Calculer leur inverses et montrer ensuite que leurs inverses sont dérivable et calculer leurs dérivées.

Exercice 9 :
Soit

$$f \ : \begin{array}{ccc} [0, \pi/2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\sin(x)} + x \end{array}$$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser. Montrer alors que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

2 Rolle, TAF and co.

Exercice 10 :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice 11 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que

$$\forall x > 0,\ \exists c > 0,\ f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

Exercice 12 ([✓]) :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 4/3]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 13 (Règle de L'Hôpital [✓]) :
Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que

$$\forall x \in [a, b], g'(x) \neq 0$$

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$
2. Montrer $\exists c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
à l'aide d'une bonne fonction auxiliaire et du théorème de Rolle.
3. En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
4. En déduire la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^x}{(x + 1)e^x - 1}.$$
5. (Bonus) On suppose en plus que $\forall x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leq g'(x)$. Montrer que $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Exercice 14 ([✓]) :
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ et $f \in \mathcal{C}^2([a, a + 2h], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\exists c \in]a, a + 2h[,\ f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

Exercice 15 :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad f(b) = f'(b)$$

Montrer que

$$\exists c \in]a, b[,\ f(c) = f''(c)$$

Indic : *Introduire une fonction auxiliaire dépendant de $f(x)$, $f'(x)$ et e^x.*

Exercice 16 ([✓]) :
Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
2. En déduire l'existence d'un autre point que l'origine en lequel la tangente au graphe de f passe par l'origine.

Exercice 17 ([✓]) :
On considère la fonction f définie par
$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Montrer qu'on peut étendre f en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. À l'aide du TAF appliqué entre x et $x+1$, déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{1/x}\right)$$

Exercice 18 (>:-) [✓]) :
Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que
$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ell \in \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad xf'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ell' \in \mathbb{R}.$$

1. On introduit la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$. Étudier la dérivabilité de g.
2. que peut-on en déduire sur ℓ' ?

Exercice 19 (Généralisations du théorème de Rolle (**)) :
On présente ici deux généralisations du théorème de Rolle. On peut en faire d'autres.
1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\exists c \in \mathbb{R},\ f'(c) = 0$.

3 Classes

Exercice 20 :
Montrer que la fonction
$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\ln(x) \end{array}$$
peut être étendue en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 21 ([✓]) :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction
$$f_n \ : \ x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 ([✓]) :
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = g(x^2)$$

4 Convexité

Exercice 23 :
Montrer que $\forall a, b > 0$, $\forall t \in [0,1]$,
$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b.$$

Exercice 24 :
Avec des arguments de convexités, établir facilement les inégalités suivantes :
1. $\forall x \in [0, \pi/2],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$

Exercice 25 :
On considère $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$.
1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$,
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)\right)^{1/n}.$$
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$,
$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(x_k + y_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 26 (*) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe bornée.
Montrer que f est constante.

Exercice 27 :
Soit $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $p + q = 1$. Montrer
$$\forall x, y \geq 0,\ 1 + x^p y^q \leq (1+x)^p (1+y)^q.$$

Exercice 28 (Inégalités Young, Hölder et Minkowski (**) [✓]) :
Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
1. Montrer l'inégalité de Young :
$$\forall a, b > 0,\ ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
2. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}.$$
3. Montrer l'inégalité de Minkowski :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0,\ \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 29 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement décroissante et convexe.
Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \to I$.

5 Exos plus complets

Exercice 30 :
On se propose de prouver l'IAF pour les fonctions à valeurs complexes.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[,\mathbb{C})$. On suppose $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leq M$. On introduit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathfrak{Re}\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\overline{f(x)}\right) \end{array}$$

Montrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe en utilisant l'IAF sur φ.

Exercice 31 (**) :
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) \leq f(x)^2$. On va montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f''(x) \leq f'(x)^2.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \neq 0,\ \frac{f(x)f(x+2h) - 2f(x)f(x+h) + f(x)^2}{h^2} \leq \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)^2.$$

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \neq 0,\ \exists e_h \in]-h, 0[\cup]0, h[$,

$$\frac{f(x)f(x+2h) - 2f(x)f(x+h) + f(x)^2}{h^2} = f(x)f''(x+e_h).$$

3. Conclure.

Exercice 32 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers a telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq y_n$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

1. On suppose dans cette question $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n < a < y_n$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est dans le segment défini par $\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}$ et $\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$.
   (b) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose dans cette question qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < a < \beta$ et $f \in \mathcal{C}^1(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$.
   Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On pose $\forall \alpha > 1$,

$$f_\alpha : x \mapsto \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\forall \alpha > 1,\ f_\alpha \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et déterminer $f'_\alpha(0)$.
   (b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$. Donner une expression de la suite (u_n) associée en fonction de n et α.

(c) Étudier la limite de (u_n) en fonction de α.

(d) Conclure sur le cas général.

Exercice 33 ([✓]) :

Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose $\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. À l'aide de l'IAF, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$$

2. En déduire un encadrement de $\frac{1}{k^\alpha}$ pour tout $k \geq 2$.
3. En déduire un encadrement de u_n puis un équivalent de u_n.
4. Application : Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 34 :

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|y - x|^\alpha$$

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est höldérienne d'exposant 1.
2. Démontrer que les fonctions höldérienne d'exposants > 1 sont constantes.
3. On considère $f : x \mapsto x \ln x$ définie sur $]0, 1]$. Montrer par l'absurde que f n'est pas höldérienne d'exposant 1 en utilisant l'IAF et en introduisant $y = 2x$.
4. Soit $\alpha \in]0, 1[$.
   (a) Montrer que la fonction $y \mapsto y^{1-\alpha}(1 + |\ln y|)$ est prolongeable par continuité en 0.
   (b) En déduire que $y \mapsto y^{1-\alpha}(1 + |\ln y|)$ est bornée sur $[0, 1]$ une fois prolongée.
   (c) Montrer que $\forall x, y \in]0, 1]$ avec $x < y$,
   $$\frac{|f(y) - f(x)|}{|x - y|^\alpha} \leq y^{1-\alpha}(1 + |\ln(y)|)$$
   Indic : *On utilisera* $\ln(1 + u) \leq u$ *pour* $u \geq 0$.
5. En déduire que f est höldérienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0, 1[$.