Chapitre 9

Calcul d'intégrales - Équations différentielles TP

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

27 mars 2025

Exercice 1 :
Dans les deux cas suivants, calculer l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle I et comparer avec une résolution numérique en suivant la méthode des rectangles, puis des trapèzes.

1. $I = [0, 5]$ et $f(t) = (t^2 + 1)\exp(t + 3)$.
2. $f(x) = x^2 - 3x\sin(x)$ définie sur $I = [-\pi, \pi]$

Exercice 2 (Prise en main) :

1. On considère l'équation différentielle $y' = y$. Faire une fonction `Expo(n)` qui affiche le graphe d'une solution approchée de cette équation différentielle sur $[-10, 10]$ avec la méthode d'Euler avec n points sur $[-10, 0]$ et sur $[0, 10]$. On prendre la condition initiale $y(0) = 1$. ON tracera également la solution théorique de cette équation différentielle pour comparaison. Rester la fonction avec $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$. Commenter.
2. On considère l'équation différentielle $y' = t + \sin(y)$. Tracer la solution de cette équation différentielle sur $[0, 4\pi]$ en imposant $y(0) = 0$.
3. On considère l'équation différentielle $y'' = \frac{t^2y'^2}{1+y^2}$. Tracer la solution approchée de cette équation différentielle sur $[0, 10]$ en imposant $y(0) = 1 = y'(0)$.

Exercice 3 (Portrait de phase) :
On considère les systèmes d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y(x^2 + y^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -y - \frac{x}{10}(x^2 + y^2) \\ y' = x - \frac{y}{10}(x^2 + y^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -y - \frac{x}{20}(x^2 + y^2) \\ y' = x - \frac{y}{20}(x^2 + y^2) \end{cases}$$

1. Faire une fonction `Phase(a:float, n:int) -> list` qui donne la solution (x, y) d'un tel système par la méthode d'Euler sur $[0, 20]$ avec n points, en fonction du paramètre a qui est le coefficient qui change entre les trois systèmes différentiels. On prendre comme condition initiales $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.
2. Faire une fonction `Compa(n:int) -> None` qui affiche sur un même graphe les solutions y en fonction de x des trois systèmes précédentes pour les comparer.

Exercice 4 :
Afin d'améliorer le modèle de Malthus de l'évolution d'une population au cours du temps, Pierre-François Verlhust propose son modèle logistique en 1838. Ce dernier ajoute au taux de croissance maximal r, un paramètre K rendant compte de la capacité limite du système.

Ainsi le problème de Cauchy résultant est

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt}(t) = rP(t)\left(1 - \dfrac{P(t)}{K}\right) \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$$

1. Montrer que le schéma numérique de ce problème est $\forall i \in [\![0, n[\![, \quad P[i+1] = P[i] + r\Delta_t P[i](1 - P[i]/K)$.
2. Résoudre numériquement ce problème sur $I = [0, 10]$ en supposant que $(r; K; P_0) = (1,2; 3000; 50)$. On pourra compléter la fonction suivante et utiliser $n = 1000$ (ce qui détermine Δ_t).

```python
def verlhust(I:tuple, n:int, p0:int, r:int, K:int) -> tuple:
    p = [p0]
    t = [I[0]]
    h = (I[1] - I[0]) / n
    for i in range( n ):
        t+= [ ... ]
        p+= [ ... ]
    return t, p
```

3. Afficher l'évolution de la population au cours du temps.
4. Que se passe-t-il si $P_0 = K$? lorsque $P_0 > K$?

Exercice 5 :
Dans les années 1920, Lotka et Volterra proposèrent de coupler les équations de Verlhust pour modéliser la croissance de deux populations en interactions : il s'agit du modèle proie-prédateur défini par les équations suivantes (on reprend l'exemple des lapins et des renards (voir un exercice du début d'année)) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = x(t)\left(\alpha - \beta y(t)\right) \\ \frac{dy}{dt}(t) = y(t)\left(\gamma x(t) - \delta\right) \end{cases}$$

où :

- x (resp. y) est le nombre de proies (resp. prédateurs)
- α taux de reproductions des proies
- β taux de mortalité des proies vis à vis des prédateurs
- γ reproduction des prédateurs vis à vis de la quantité de proies
- δ taux de mortalité des prédateurs

On décide d'utiliser les valeurs numériques suivantes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1/20, 1/1000, 1/10000, 1/50)$ et $(x_0, y_0) = (150, 40)$.

1. À partir du système d'équations différentielles, montrer que la première équation entraîne le schéma explicite $x_{i+1} = x_i + hx_i(\alpha - \beta y_i)$, puis déterminer l'ensemble du schéma numérique explicite.
2. Proposer une fonction `proiePredateur(XY0:tuple, I:tuple, n:int) -> tuple`, qui résout numériquement ce problème de Cauchy et affiche l'évolution des deux populations en fonctions du temps. Pour tester, on prendre $n = 2000$ et $I = [0, 1000]$.