



DM 8

Dénombrément

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 25 Mars 2025

Problème 1 (Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$) :

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I : Théorème de Cantor-Bernstein

Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein :

Théorème 0.1 (Cantor-Bernstein) :

Si E et F sont deux ensembles tels qu'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E , alors il existe une bijection de E sur F .

Soit E et F deux ensembles. Soit $i : E \rightarrow F$ et $j : F \rightarrow E$ deux injections. On pose

$$A_0 = E \setminus j(F), \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = j \circ i(A_n)$$

et

$$B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \quad C = E \setminus B$$

- Dans cette question, on va construire la bijection entre E et F .
 - Montrer que $\forall x \in C, \exists ! z \in F$ tel que $x = j(z)$. On notera $\varphi(x)$ cet élément.
 - Si $x \in B$, on note $\varphi(x) = i(x)$. Montrer qu'on a bien défini une application $\varphi : E \rightarrow F$.
- Dans cette question, on va montrer que φ est injective.
 - Montrer que $\varphi|_B$ et $\varphi|_C$ sont injectives.
 - Soit $x \in C$ et $y \in B$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Montrer que $x = (j \circ i)(y)$.
 - En déduire que φ est injective.
- Montrer que φ est surjective, puis conclure.
- Application : construction d'une bijection de $[0, 1[$ dans $[0, 1]$

On considère les deux applications

$$j : \begin{array}{ccc} [0, 1[& \rightarrow & [0, 1] \\ x & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad i : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & [0, 1[\\ x & \mapsto & \frac{x}{2} \end{array}$$

- Justifier que i et j sont injectives.
- Déterminer les ensembles A_0, A_1, B et C .
- Déterminer l'application φ créée comme au-dessus.
- Calculer $\varphi(0), \varphi(1/4), \varphi(1/3), \varphi(1/2), \varphi(2/3)$ et $\varphi(3/4)$.

Partie II : Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

1. Montrer que les ensembles $\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P} = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ sont dénombrables.
2. Dans cette question, on montre que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. On introduit la fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \{0, \dots, 5\}$.
 - (b) Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
 - (c) Établir que φ est bijective.
3. Dans cette question, on montre la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$. On introduit la fonction $\psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \psi(p, q) = 2^p(2q + 1)$$

- (a) Montrer que ψ est bien définie.
 - (b) Montrer que ψ est injective.
 - (c) Montrer que ψ est surjective.
 - (d) Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable et que $\mathbb{Z}^2$ l'est également.
4. Dans cette question, on montre la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$.
- (a) Donner une injection simple de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.
 - (b) On considère l'application $\zeta : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ définie par $\zeta(r) = (p, q)$ où p/q est l'écriture de r sous forme d'une fraction irréductible. ζ est-elle injective ? Surjective ?
 - (c) Exhiber une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.
 - (d) Conclure.

Problème 2 (Permutations sans points fixes) :

Si n est un entier naturel non nul, on définit :

- $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui même ;
- γ_n le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe. Autrement dit,

$$\gamma_n = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \sigma(k) \neq k\}.$$

On pose $\gamma_0 = 1$ par convention.

Pour une application donnée, l'expression "avoir k points fixes" signifiera avec *exactement* k points fixes (ni plus, ni moins).

Tout schéma aidant la compréhension est le bienvenu, mais ne saura être suffisant et se substituer à une justification.

1. Calculer γ_1 et γ_2 .
2. Classer les éléments $\mathfrak{S}_3$ selon leur nombre de points fixes, et calculer γ_3 .
3. Dans cette question, on suppose $n = 4$.
 - (a) Quel est le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant trois points fixes ?
 - (b) Quel est le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant deux points fixes ?

- (c) Quel est le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant un point fixe ?
- (d) En déduire γ_4 .
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- (a) Rappeler la valeur du cardinal de $\mathfrak{S}_n$.
- (b) Si $k \in \{0, \dots, n\}$, combien d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ ont exactement k points fixes ?
- (c) Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k = n!$.
- (d) Que vaut γ_5 ?
- (e) Application : En arrivant à une fête, 5 personnes déposent leur manteau, en vrac, dans une petite pièce mal éclairée. En fin de soirée, chacun de ces 5 personnes repart en prenant, au hasard, un des 5 manteaux (l'abus d'alcool et le mauvais éclairage n'aidant pas à distinguer les différents manteaux). Quelle est la probabilité qu'aucun des invités ne porte son manteau ?
5. (a) Calculer, en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.
- (b) Montrer, par raisonnement par dénombrement puis par le calcul, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j, k \in \{0, \dots, n\}, j \leq k, \binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}.$$

- (c) En déduire que, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k,$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

- (d) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de γ_n .
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ et $f_n(x) = e^x g_n(x)$.
- (a) Déterminer une relation entre g'_n et g_{n-1} . En déduire une expression simple de $f'_n(x)$.
- (b) Montrer que $|f_n(1) - f_n(0)| \leq \frac{e}{n!}$.
- (c) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_n}{n!}$. Que représente cette valeur ?