



Chapitre 1 - TD : Calculs Algébriques

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

12 septembre 2023

1 Sommes simples et coefficient binomiaux

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelles. Donner les conditions, sur les entiers p et q , d'existence de la somme suivante et la simplifier :

$$\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$$

Exercice 2 :

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- 1) $\sum_{k=3}^{n+1} k$
- 2) $\sum_{k=3}^{n-1} 2^k$
- 3) $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$
- 4) $\sum_{k=0}^n (k + 2)2^k$
- 5) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
- 6) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
- 7) $\sum_{k=1}^n k k!$

Exercice 3 :

Montrer que $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k} \binom{kn}{(k-1)n} = \binom{kn-1}{(k-1)n}.$$

Exercice 4 ([✓]) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes

$$S_1 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad S_2 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} \quad S_3 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Exercice 5 ([✓]) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

Exercice 6 :Simplifier, pour tout $n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k^2 - 1}{k^2} \right)$$

Exercice 7 ([✓]) :

1. Montrer que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \neq 1$,

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{\alpha}{t - 1} + \frac{\beta}{t + 1}$$

2. En déduire une simplification pour tout $n \geq 2$ de

$$v_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$$

Exercice 8 :On rappelle que $\forall x \neq 0[\pi]$, $\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 0[\pi/2]$,

$$\cotan(y) - 2 \cotan(2y) = \tan(y).$$

2. En déduire une expression, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0[\pi/2]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, de

$$\sum_{k=0}^n 2^k \tan(2^k x).$$

Exercice 9 (Transformation d'Abel (*)) :Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. On définit alors deux autres suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.
2. Calculer, en appliquant la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k 2^k$.

Exercice 10 (*) :

1. Étude de la croissance des factorielles.
 - (a) Montrer que si $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n < m$, alors $n! < m!$.
 - (b) Montrer que si $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n! < m!$, alors $n + 1 \leq m$.
2. On va résoudre maintenant l'équation $n! + m! = p!$ où $n, m, p \in \mathbb{N}$. Pour cela, on considère un triplet solution.
 - (a) Montrer que $n! = 1$.
 - (b) Résoudre le problème.

Exercice 11 ([✓]) :Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k+1}$$

Exercice 12 :Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k}$$

Exercice 13 :Le but de cette question est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{N}$ tel que $(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n} + \sqrt{1 + \alpha_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, b_n \in \mathbb{N}, (1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$ en utilisant le binôme de Newton.
2. Montrer également que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n \sqrt{2}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.
4. En déduire le résultat attendu.

Exercice 14 () :**

1. En introduisant le polynôme $P(X) = (1 + X)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, et ses dérivées première et seconde, calculer

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

2. Avec la même méthode et le polynôme $P(X) = \frac{1}{2}((1 + X)^{2n} + (1 - X)^{2n})$, calculer

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^n k^2 \binom{2n}{2k}$$

Exercice 15 (*) :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}.$$

(b) En déduire que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \binom{2n}{k-1} < \binom{2n}{k}$$

et que

$$\forall k \in \{n, \dots, 2n-1\}, \binom{2n}{k+1} < \binom{2n}{k}.$$

(c) Comment interpréter les résultats de la question précédente ?

2. Montrer enfin que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Exercice 16 (*) :

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Exercice 17 :Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$

et

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1}.$$

2 Sommes doubles**Exercice 18 :**Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Développer

$$(a + b + c)^n.$$

Exercice 19 :

Calculer les sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \quad S_2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij \quad S_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |i - j|$$

$$S_4 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \quad S_5 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \quad S_6 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$$

Exercice 20 :Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \ln(i^k).$$

Exercice 21 :Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{\min(i, j)}.$$

Exercice 22 :

Calculer les sommes suivantes en faisant intervenir des sommes doubles

$$\sum_{k=1}^n kx^k \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 23 :Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$C_n = \sum_{1 \leq p < q \leq n} (p + q).$$

1. Exprimer la somme $\sum_{1 \leq p, q \leq n} (p + q)$ en fonction de C_n .
2. En déduire la valeur de C_n .

Exercice 24 ([✓]) :Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j}$$

Puis en déduire la valeur de la somme quadruple :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq \ell \leq n} \frac{i}{j k \ell}.$$

Indic : Penser à un exercice précédent pour S_2 **Exercice 25 :**Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^n S_k$$

Établir que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = (n+1)S_n - n$$

Exercice 26 ([✓]) :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k.$$

2. Si $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$, comparer

$$\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} \quad \text{et} \quad \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}.$$

3. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k.$$

Exercice 27 :Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{p=1}^n \left(\sum_{k=0}^p 2^{pk} \right).$$

3 Produits

Exercice 28 :

Simplifier, pour tout $n \geq 2$, le produit suivant

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Pourquoi n'a-t-on pas pris $n \in \mathbb{N}^*$ ou $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 29 :

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (4k - 2) = \prod_{k=1}^n (n + k)$$

1. Directement
2. Par récurrence.

Exercice 30 :

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^n ((2k + 1)!) \geq ((n + 1)!)^{n+1}.$$

Exercice 31 (*) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^n k(n - k + 1)$$

et en déduire

$$\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

Exercice 32 :

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$V = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij \quad W = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} ij \quad X = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

$$Y = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij \quad Z = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$$

Calculer V . En déduire W . Montrer que $X = Y$ puis exprimer W en fonction de X et Y . En déduire X puis Z .

Exercice 33 :

Déterminer la limite de la suite (P_n) définie par

$$\forall n \geq 1, P_n = \prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$$

Exercice 34 :

Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$$

1. Trouver une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \geq 1$,

$$\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{k - 1}{k + 1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}$$

2. En déduire une simplification de u_n .
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 35 (*) :

1. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{n+p+1}{n}.$$

2. Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=0}^n \prod_{j=1}^p (i+j).$$

Exercice 36 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$P_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}).$$

1. Calculer P_n quand $a = 1$.
2. Calculer $(1-a)P_n$ quand $a \neq 1$ et en déduire la valeur de P_n .

Exercice 37 (*[✓]) :

Soit $\alpha \in]0, \pi[$. On pose $P_n = \prod_{k=0}^n \cos(\alpha/2^k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $\sin(\alpha/2^n)P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la limite de P_n .