DS 1
Révisions
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 14 Septembre 2022

Problème 1 :
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1+\ln(x)}{e^x-1}$.

1. *Question préliminaire :* Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $k : I \to \mathbb{R}$ strictement décroissante. Soit $a, b \in I$ tels que $k(a) < k(b)$.

   Supposons $a \leq b$. Alors, par décroissance de k, $k(a) \geq k(b)$. Or $k(a) < k(b)$. Donc ☠. Donc $a > b$.

2. On a, par composition,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \mapsto & \ln(x) & & \\ & & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & y+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+\ln(x) \end{array}$$

De plus, encore par composition,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} & & & & \\ x & \mapsto & e^x & & & & \\ & & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R}^* & & \\ & & y & \mapsto & y-1 & & \\ & & & & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & & & z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{e^x-1} \end{array}$$

Puis, par produit, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}^*$.

3. La fonction $x \mapsto 1+\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de fonctions dérivables. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par sommes de fonctions dérivables et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Puis,

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(e^x-1) - e^x(1+\ln(x))}{(e^x-1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^x - 1 - xe^x(1+\ln(x))}{x(e^x-1)^2} \\
&= \frac{(1 - x - x\ln(x))e^x - 1}{x(e^x-1)^2}.
\end{aligned}
$$

4. On considère la fonction
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1-x-x\ln(x))e^x - 1 \end{array}$$

Autrement dit, g correspond au numérateur de $f'(x)$.

(a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x > 0,\ g'(x) = (-1 - \ln(x) - 1 + 1 - x - x\ln(x))e^x = -(1 + x + \ln(x) + x\ln(x))e^x.$$

(b) On pose $h : x \mapsto 1 + x + \ln(x) + x\ln(x)$. On a donc, $\forall x > 0$, $g'(x) = -h(x)e^x$. Et donc g' est du signe de h.

i. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Et

$$\forall x > 0,\ h'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln(x) + 1 = \frac{1}{x} + \ln(x) + 2.$$

ii. h' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x > 0,\ h''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

iii. On a
$$\forall x > 0,\ h'(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) + 2 = \frac{1 + x\ln(x)}{x} + 2.$$

Or $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (limite connue de référence), donc $h'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

Puis, $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc, par sommes, $h'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

On a également, par somme,

$$h(x) = 1 + x + \ln(x) + x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \quad \text{et} \quad h(x) = 1 + x + \ln(x) + x\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

iv. On peut donc dresser le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
h'	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$h'(x)$			$+$		
h	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

v. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc continue. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, $h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Donc $0 \in \mathbb{R} = h(\mathbb{R}_+^*)$. Et donc, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $h(\alpha) = 0$.

D'autre part, h est strictement monotone et continue, donc h est une bijection par théorème de la bijection et donc α est unique.

On a $h(1) = 2$. Donc $\alpha \neq 0$ (puisque $h(\alpha) = 0$). On a donc $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$. Supposons $\alpha > 1$. Alors, par croissance stricte de h, on a $h(\alpha) = 0 > h(1) = 2$. ☠. donc $\alpha < 1$. Et donc $\alpha \in]0, 1[$ puisque $\alpha > 0$.

(c) Par la limite de référence $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, on a $1-x-x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$. Or $e^x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, donc

$$g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

De plus, $1-x-x\ln(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty$ et $e^x- \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$, donc, par produit,

$$g(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty.$$

(d) On peut donc faire le tableau de signes :

x	0		α		β		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0		$+$				
$g'(x)$		$+$	0		$-$				
g	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

(e) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier sur $]\alpha,+\infty[$. Donc en particulier, g est continue sur $]\alpha,+\infty[$. Or, d'après la question précédente, g est strictement décroissante sur $]\alpha,+\infty[$ et $g(\alpha)>0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty$. Donc, par théorème de la bijection, $\exists!\beta>\alpha$ tel que $g(\beta)=0$.

(f) On a $g(1)=-1<0$. Donc $\beta\neq 1$. On a donc $\beta<1$ ou $\beta>1$.

Si $\beta>1$, alors, par décroissance stricte de g sur $]\alpha,+\infty[$ et puisque $\beta,1\in]\alpha,+\infty[$, on a $g(\beta)=0<g(1)=-1$ ☠. Donc $\beta<1$.

(g) On en déduit le tableau de signes :

x	0		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

5. On sait $e^x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1^+$ (par continuité), donc $e^x-1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$. Et donc, par passage à l'inverse,

$$\frac{1}{e^x-1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$$

Or $1+\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. Et donc, par produit, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$.

Pour la limite en $+\infty$, il y a plusieurs façon de faire. Par exemple :

$$\forall x>0,\ f(x)=\frac{1+\ln(x)}{e^x-1}=\frac{1+\ln(x)}{x}\frac{x}{e^x-1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}.$$

Or on a les limites de références

$$\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty.$$

D'où

$$\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0, \quad \text{et} \quad \frac{e^x}{x}-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty.$$

En passant à l'inverse et en faisant le produit, on a donc

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0.$$

6. En rappelant que $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{g'(x)}{x(e^x-1)^2}$ d'après la question 3. Et donc

x	0		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$x(e^x-1)^2$			$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	0

7. Par définition de β, on a

$$g(\beta) = 0 \iff (1-\beta-\beta\ln(\beta))e^\beta - 1 = 0 \iff e^\beta = \frac{1}{1-\beta-\beta\ln(\beta)}.$$

($1-\beta-\beta\ln(\beta) \neq 0$ car sinon, on aurait $1 = 0$). Et donc :

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \frac{1+\ln(\beta)}{e^\beta - 1} \\ &= \frac{1+\ln(\beta)}{\frac{1}{1-\beta-\beta\ln(\beta)} - 1} \\ &= \frac{(1+\ln(\beta))(1-\beta-\beta\ln(\beta))}{1-(1-\beta-\beta\ln(\beta))} \\ &= \frac{(1+\ln(\beta))(1-\beta-\beta\ln(\beta))}{\beta(1+\ln(\beta))} \\ &= \frac{1-\beta-\beta\ln(\beta)}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta e^\beta} \end{aligned}$$

Exercice 2 (Logique) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ une suite et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

2. $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

3. $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ tel que $f(a) > f(b)$.

4. $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ tel que $f(a) = f(b) = 3$.

5. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n = c$. On peut l'écrire aussi : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

Exercice 3 (Logique) :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) > M$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et $x < 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 1$ et $f(x) > -1$. *i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in]-1, 1[$.
4. $\forall \ell \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall A > 0$, $\exists x \geq A$ tel que $|f(x) - \ell| > \varepsilon$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $(f(x) < 0$ et $x \notin]0,1[)$ ou $(x \in]0,1[$ et $f(x) \geq 0)$.

Exercice 4 (Modes de raisonnements) :

1. On utilise un raisonnement par analyse-synthèse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $-4x = \sqrt{7x^2+1}$. Donc $x \leq 0$. Puis $16x^2 = 7x^2 + 1 \iff 9x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{3}$. Or $x \geq 0$. Donc $x = -1/3$.

Il reste à faire la synthèse, c'est-à-dire la vérification : si $x = -1/3$, alors $-4x = 4/3$ et

$$\sqrt{7x^2+1} = \sqrt{\frac{7}{9}+1} = \sqrt{\frac{16}{9}} = 4/3.$$

Finalement $-4x = \sqrt{7x^2+1} \iff x = -1/3$.

2. On raisonne de nouveau par analyse-synthèse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|3-x| \leq 3x+1$. Alors $3x+1 \geq 0 \iff x \geq -1/3$. De plus,

$$\begin{aligned}
|3-x| \leq 3x+1 &\implies (3-x)^2 = (3x+1)^2 && \text{car } x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&\iff x^2 - 6x + 9 \leq 9x^2 + 6x + 1 \\
&\iff 8x^2 + 12x - 8 \geq 0 \\
&\iff 2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \\
&\iff x \notin \left]\frac{-3-5}{4}, \frac{-3+5}{4}\right[&& \text{car } \Delta = 9 + 16 = 25 \\
&\iff x \notin]-2, 1/2[
\end{aligned}$$

Or $x \geq -1/3$, donc $x \in (]-\infty, -2] \cup [1/2, +\infty[) \cap [-1/3, +\infty[= [1/2, +\infty[$.

La synthèse (*i.e.* la vérification) est facile à faire : si $x \in [1/2, 3]$, alors $|3-x| = 3-x$ et donc $|3-x| \leq 3 - 1/2 = 5/2$ et $3x+1 \geq 3/2 + 1 = 5/2$ donc l'inégalité est vérifiée ; et si $x \geq 3$, alors $|3-x| = x - 3 \leq (x-3) + (2x+4) = 3x+1$. Donc l'inégalité est encore vérifiée. L'inégalité est donc vraie dans tous les cas.

D'où $|3-x| \leq 3x+1 \iff x \geq 3/4$.

3. [Récurrences]

Soit $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

(a) Alors $u_2 = u_0 + u_1 = 2$. Et $u_1^2 - u_0 u_2 = 1 - 2 = -1 = (-1)^1$.

Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^n$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} &= u_{n+1}^2 - u_n(u_n + u_{n+1}) \\
&= u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1} \\
&= u_{n+1}^2 - ((-1)^n + u_{n+1}u_{n-1}) - u_n u_{n+1} \\
&= u_{n+1}^2 - (-1)^n - u_{n+1}u_{n-1} - u_n u_{n+1} \\
&= u_{n+1}^2 - (-1)^n - u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) \\
&= u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} - u_{n+1}^2 \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^n$.

(b) On a $u_0 = 1 \geq 0$ et $u_1 = 1 \geq 1$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= u_n + u_{n+1} && \text{def suite} \\
&\geq n + n + 1 && \text{HR} \\
&= 2n + 1 \\
&\geq n + 2 && \text{car } n \geq 1
\end{aligned}$$

Donc, par principe de récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

On peut alors en conclure de plus que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

4. [Contrapositions]

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $|a| < \varepsilon \implies a = 0$. On va raisonner par contraposition. On va donc montrer que $a \neq 0 \implies \exists \varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq a$.

Supposons donc $a \neq 0$. Alors $|a| > 0$. On pose $\varepsilon = |a|/2 > 0$. Alors $\varepsilon \leq |a|$.

Par conséquent, la contraposée de la réciproque est vraie, et donc, l'implication que nous voulions démontrer l'est également.

(b) Soit $n_1, \ldots, n_9 \in \mathbb{N}$. On va raisonner également par contraposition.

Sans perte de généralité et quitte à les renommer, on peut supposer les entiers ordonné par ordre croissant. Donc $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_9$. Alors la plus grand somme que l'on peut former à partir de trois distincts de ces entiers est $n_7 + n_8 + n_9$.

On suppose ici $n_7 + n_8 + n_9 < 30$. Donc $n_1 + n_2 + n_3 \leq n_4 + n_5 + n_6 \leq n_7 + n_8 + n_9 < 30$. Et donc

$$\sum_{k=1}^{9} n_k < 3 \times 30 = 90.$$

On vient donc de montrer que si aucune des sommes de trois des 9 entiers n'est supérieure ou égale à 30, alors $\sum_{k=1}^{9} n_k < 90$. Autrement dit, on a montré la contraposé de ce que l'on souhaitait prouver.

Exercice 5 (BONUX) :

On va raisonner par analyse-synthèse. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$. On remarque alors, en prenant $x = y = 0$, $f(0)^2 = f(0)$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(0) = f(0) + x$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = x$. Ce qui est absurde. Donc $f(0) \neq 0$. Donc $f(0) = 1$.

Et enfin, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(0) = f(0) + x$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$.

Il reste à faire la synthèse, c'est-à-dire la réciproque. Soit $f : x \mapsto x + 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) &= (x+1)(y+1) && \text{def } f \\
&= xy + 1 + x + y \\
&= f(xy) + x + y && \text{def } f
\end{aligned}$$

On en déduit donc qu'il n'y a qu'une seule application solution du problème, et c'est l'application $f : x \mapsto x + 1$.