



## Chapitre 2 - TD : Complexes

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

September 19, 2023

### 1 Bazar généraliste

#### Exercice 1 :

Donner les complexes suivants sous forme algébrique

$$z_1 = (2 + 3i)(3 + 4i)$$

$$z_2 = \frac{2 + i}{3 - 2i}$$

$$z_3 = (1 + i)^7$$

$$z_4 = \left( \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i} \right)^2$$

$$z_5 = \frac{(1 + i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$$

$$z_6 = (1 + e^{i\theta})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$z_7 = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

#### Exercice 2 :

Calculer le module et argument (à  $2\pi$  près) des complexes suivants, avec  $n \geq 1$  :

$$z_1 = (1 + i)^{2n}$$

$$z_2 = (1 + j)^{2n}$$

$$z_3 = \left( \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^{1515}$$

$$z_4 = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$z_5 = \frac{1 + \sin \theta + i \cos \theta}{1 + \sin \theta - i \cos \theta}$$

#### Exercice 3 :

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$$

#### Exercice 4 :

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^2 = \bar{z}.$$

#### Exercice 5 ([✓]) :

1. Soit  $a, b \in \mathbb{C}$ . Montrer :

$$1 \leq |1 + a| + |a + b| + |b|$$

2. Montrer, par un raisonnement analogue, que  $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ ,

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \quad \text{et} \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

**Exercice 6 :**

Montrer que  $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ ,  $i \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 7 :**

Soit  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tels que  $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$ .

Montrer que  $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$ .

**Exercice 8 :**

On pose  $\omega = e^{2i\pi/7}$ .

Calculer  $\omega + \omega^2 + \omega^4$  et  $\omega^3 + \omega^5 + \omega^6$ .

**Exercice 9 :**

Soit  $a, b \in \mathbb{U}$  tels que  $|a + b| = \sqrt{3}$ . Calculer  $|a - b|$ .

**Exercice 10 :**

Soit  $a, b \in \mathbb{U}$  tels que  $a - b \neq 0$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que

$$\Re \left( \frac{z + ab\bar{z} - a + b}{a - b} \right) = -1.$$

## 2 Trigonométrie

**Exercice 11 (\*\*\*) [✓] :**

Exprimer  $\cos(3\theta) \sin(6\theta)$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , puis  $\cos((2n+1)\theta)$  et  $\cos(2n\theta)$  en fonction de  $\cos(\theta)$  seulement (ces deux dernières relations donnent naissance aux polynômes de Tchebychev que nous reverrons dans le TD sur les polynômes).

Exprimer  $\cos(\theta)^{2n}$  et  $\cos(\theta)^{2n+1}$  en fonction de termes de la forme  $\cos(k\theta)$ . Même chose avec  $\sin$ .

**Exercice 12 ([✓]) :**

Donner une formule simple de  $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Même chose pour la somme  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ .

### 3 Résolution d'équation

**Exercice 13 :**

Déterminer les complexes  $z$  tel que  $z^2 = z_0$  avec  $z_0 \in \{2 + i, 4i - 3, 8i - 15, 9 + 40i\}$ .

**Exercice 14 ([✓]) :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

$$z^2 + iz + 2 = 0$$

et

$$z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i = 0$$

**Exercice 15 :**

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ .
2. Si  $z$  est une solution de l'équation précédente et  $x = z + 1/z$ , montrer que  $x$  vérifie une équation simple.
3. En déduire une valeur de  $\cos(2\pi/5)$ .

**Exercice 16 ([✓]) :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Résoudre

$$(z - 1)^n = (z + 1)^n$$

**Exercice 17 ([✓]) :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

1.  $2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i = 0$  sachant qu'il y a une racine réelle
2.  $z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 5 = 0$  sachant qu'il y a une racine réelle et une imaginaire pure
3.  $z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$

### 4 Exponentielle complexe

**Exercice 18 ([✓]) :**

Soit  $p$  et  $q$  deux entiers tels que  $0 \leq p \leq q$  et  $x \in \mathbb{R}$  qui ne soit pas un multiple de  $2\pi$ . Prouver alors

$$\left| \sum_{k=p}^q e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

**Exercice 19 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$

1.  $e^z = 1$

2.  $e^z = 2i$
3.  $e^z + e^{-z} + 1 = 0$
4.  $\begin{cases} e^z + e^{z'} = 2 \\ e^{z+z'} = 2 \end{cases}$
5.  $e^{e^z} = 1$

## 5 Géométrie

### Exercice 20 :

Déterminer le lieu géométrique des points  $M$  d'affixe tels que :

1.  $\frac{z}{z-1} \in \mathbb{R}$
2.  $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$
3.  $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$

### Exercice 21 :

Résoudre géométriquement

$$\begin{cases} |z - i| = 1 \\ |z| = |z - 1 - i| \end{cases}$$

### Exercice 22 :

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, f(z) = \frac{z-2}{z+i}$$

1. Déterminer le lieu des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $|f(z)| = 1$
2. Déterminer le lieu des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $f(z) \in \mathbb{R}$
3. Déterminer le lieu des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $f(z) \in i\mathbb{R}$

## 6 Le coin des grands

### Exercice 23 :

Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| \neq 1$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer

$$\left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

### Exercice 24 :

Soit  $a, b \in \mathbb{C}^*$ . Montrer l'égalité

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$$

**Exercice 25 (Identité du parallélogramme) :**

Montrer que  $\forall x, y \in \mathbb{C}$ ,

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

et donner une interprétation géométrique.

**Exercice 26 ([✓]) :**

Démontrer les inégalités suivantes et discuter les cas d'égalités :

1.  $|\Re(z)| + |\Im(z)| \leq \sqrt{2}|z|$
2.  $|1 + z| + |z + z'| + |z'| \geq 1$
3.  $|z + z'|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)$

**Exercice 27 :**

Soit  $z, z' \in \mathbb{C}$ .

1. Montrer  $2|z| \leq |z + z'| + |z - z'|$
2. En déduire que  $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$
3. Vérifier  $(|z + z'| + |z - z'|)^2 - (|z| + |z'|)^2 = 2|z^2 - z'^2| + (|z| - |z'|)^2$
4. Utiliser le 3. pour discuter les cas d'égalité de l'inégalité du 2.

**Exercice 28 :**

On pose  $Z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ .

1. Calculer  $|Z|$ .
2. Si  $\cos \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ , calculer  $\cos(2\theta)$ .
3. En déduire un argument simple de  $Z$ .

**Exercice 29 :**

Soit  $ABC$  un triangle et  $p \in ]0, 1[$ . On considère les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  définis par

$$\overrightarrow{AA'} = p\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BB'} = p\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA}.$$

Dans le plan complexe, on note  $a, b, c$  les affixes respectives des points  $A, B$  et  $C$  et  $a', b'$  et  $c'$  celles des points  $A', B'$  et  $C'$  respectivement.

On note enfin  $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .

1. Calculer  $\omega^3$ ,  $1 + \omega + \omega^2$ , puis comparer  $\omega^2$  à  $\bar{\omega}$ .
2. Montrer que  $a' = (1 - p)a + pb$ .  
De même, exprimer  $b'$  et  $c'$  en fonction de  $a, b, c$  et  $p$ .
3. (a) Exprimer  $|1 - p + p\omega|$  en fonction de  $p$ .  
(b) En déduire que,  $\forall p \in ]0, 1[$ ,  $0 < |1 - p + p\omega| < 1$  puis que  $0 < |1 - p + p\omega^2| < 1$ .

(c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |1 - p + p\omega|^n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |1 - p + p\omega^2|^n$ .

4. Étude d'un exemple : On considère un triangle équilatéral direct  $ABC$  de côté  $4\text{cm}$ .

(a) Faire une figure et placer les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  lorsque  $p = 1/4$ .

(b) Calculer la longueur  $A'B'$ .

*Indic : On pourra définir un repère orthonormé d'origine  $B$  approprié et déterminer les affixes des points dans ce repère.*

**Exercice 30 :**

Soit  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}$ . On pose  $z = \left(\sum_{k=1}^n z_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right)$ . Montrer que  $z$  est un réel tel que  $0 \leq z \leq n^2$ .

**Exercice 31 (\*) :**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|1 + z + z^2 + \dots + z^9| = 1$  et  $|z| = 1$ . Montrer que  $z^9 = 1$  ou  $z^{11} = 1$ .