



Chapitre 2 - TD : Complexes

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

September 19, 2023

1 Bazar généraliste

Exercice 1 :

Donner les complexes suivants sous forme algébrique

$$z_1 = (2 + 3i)(3 + 4i)$$

$$z_2 = \frac{2 + i}{3 - 2i}$$

$$z_3 = (1 + i)^7$$

$$z_4 = \left(\frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i} \right)^2$$

$$z_5 = \frac{(1 + i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$$

$$z_6 = (1 + e^{i\theta})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$z_7 = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

Exercice 2 :

Calculer le module et argument (à 2π près) des complexes suivants, avec $n \geq 1$:

$$z_1 = (1 + i)^{2n}$$

$$z_2 = (1 + j)^{2n}$$

$$z_3 = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^{1515}$$

$$z_4 = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$z_5 = \frac{1 + \sin \theta + i \cos \theta}{1 + \sin \theta - i \cos \theta}$$

Exercice 3 :

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$$

Exercice 4 :

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 = \bar{z}.$$

Exercice 5 ([✓]) :

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer :

$$1 \leq |1 + a| + |a + b| + |b|$$

2. Montrer, par un raisonnement analogue, que $\forall z, z' \in \mathbb{C}$,

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \quad \text{et} \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

Exercice 6 :

Montrer que $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $i \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 :

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.

Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

Exercice 8 :

On pose $\omega = e^{2i\pi/7}$.

Calculer $\omega + \omega^2 + \omega^4$ et $\omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

Exercice 9 :

Soit $a, b \in \mathbb{U}$ tels que $|a + b| = \sqrt{3}$. Calculer $|a - b|$.

Exercice 10 :

Soit $a, b \in \mathbb{U}$ tels que $a - b \neq 0$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\Re \left(\frac{z + ab\bar{z} - a + b}{a - b} \right) = -1.$$

2 Trigonométrie

Exercice 11 (*) [✓] :**

Exprimer $\cos(3\theta) \sin(6\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, puis $\cos((2n+1)\theta)$ et $\cos(2n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ seulement (ces deux dernières relations donnent naissance aux polynômes de Tchebychev que nous reverrons dans le TD sur les polynômes).

Exprimer $\cos(\theta)^{2n}$ et $\cos(\theta)^{2n+1}$ en fonction de termes de la forme $\cos(k\theta)$. Même chose avec \sin .

Exercice 12 ([✓]) :

Donner une formule simple de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Même chose pour la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

3 Résolution d'équation

Exercice 13 :

Déterminer les complexes z tel que $z^2 = z_0$ avec $z_0 \in \{2 + i, 4i - 3, 8i - 15, 9 + 40i\}$.

Exercice 14 ([✓]) :

Résoudre dans \mathbb{C} :

$$z^2 + iz + 2 = 0$$

et

$$z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i = 0$$

Exercice 15 :

- Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
- Si z est une solution de l'équation précédente et $x = z + 1/z$, montrer que x vérifie une équation simple.
- En déduire une valeur de $\cos(2\pi/5)$.

Exercice 16 ([✓]) :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre

$$(z - 1)^n = (z + 1)^n$$

Exercice 17 ([✓]) :

Résoudre dans \mathbb{C} :

- $2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i = 0$ sachant qu'il y a une racine réelle
- $z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 5 = 0$ sachant qu'il y a une racine réelle et une imaginaire pure
- $z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$

4 Exponentielle complexe

Exercice 18 ([✓]) :

Soit p et q deux entiers tels que $0 \leq p \leq q$ et $x \in \mathbb{R}$ qui ne soit pas un multiple de 2π . Prouver alors

$$\left| \sum_{k=p}^q e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

Exercice 19 :

Résoudre dans \mathbb{C}

- $e^z = 1$

2. $e^z = 2i$
3. $e^z + e^{-z} + 1 = 0$
4. $\begin{cases} e^z + e^{z'} = 2 \\ e^{z+z'} = 2 \end{cases}$
5. $e^{e^z} = 1$

5 Géométrie

Exercice 20 :

Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe tels que :

1. $\frac{z}{z-1} \in \mathbb{R}$
2. $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$
3. $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$

Exercice 21 :

Résoudre géométriquement

$$\begin{cases} |z - i| = 1 \\ |z| = |z - 1 - i| \end{cases}$$

Exercice 22 :

On considère la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, f(z) = \frac{z-2}{z+i}$$

1. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $f(z) \in \mathbb{R}$
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $f(z) \in i\mathbb{R}$

6 Le coin des grands

Exercice 23 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer

$$\left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 24 :

Soit $a, b \in \mathbb{C}^*$. Montrer l'égalité

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$$

Exercice 25 (Identité du parallélogramme) :Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{C}$,

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

et donner une interprétation géométrique.

Exercice 26 ([✓]) :

Démontrer les inégalités suivantes et discuter les cas d'égalités :

1. $|\Re(z)| + |\Im(z)| \leq \sqrt{2}|z|$
2. $|1 + z| + |z + z'| + |z'| \geq 1$
3. $|z + z'|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)$

Exercice 27 :Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Montrer $2|z| \leq |z + z'| + |z - z'|$
2. En déduire que $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$
3. Vérifier $(|z + z'| + |z - z'|)^2 - (|z| + |z'|)^2 = 2|z^2 - z'^2| + (|z| - |z'|)^2$
4. Utiliser le 3. pour discuter les cas d'égalité de l'inégalité du 2.

Exercice 28 :On pose $Z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

1. Calculer $|Z|$.
2. Si $\cos \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, calculer $\cos(2\theta)$.
3. En déduire un argument simple de Z .

Exercice 29 :Soit ABC un triangle et $p \in]0, 1[$. On considère les points A' , B' et C' définis par

$$\overrightarrow{AA'} = p\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BB'} = p\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA}.$$

Dans le plan complexe, on note a, b, c les affixes respectives des points A, B et C et a', b' et c' celles des points A', B' et C' respectivement.On note enfin $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer $\omega^3, 1 + \omega + \omega^2$, puis comparer ω^2 à $\bar{\omega}$.
2. Montrer que $a' = (1 - p)a + pb$.
De même, exprimer b' et c' en fonction de a, b, c et p .
3. (a) Exprimer $|1 - p + p\omega|$ en fonction de p .
(b) En déduire que, $\forall p \in]0, 1[, 0 < |1 - p + p\omega| < 1$ puis que $0 < |1 - p + p\omega^2| < 1$.

(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} |1 - p + p\omega|^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |1 - p + p\omega^2|^n$.

4. Étude d'un exemple : On considère un triangle équilatéral direct ABC de côté 4cm .

(a) Faire une figure et placer les points A' , B' et C' lorsque $p = 1/4$.

(b) Calculer la longueur $A'B'$.

Indic : On pourra définir un repère orthonormé d'origine B approprié et déterminer les affixes des points dans ce repère.

Exercice 30 :

Soit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}$. On pose $z = \left(\sum_{k=1}^n z_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right)$. Montrer que z est un réel tel que $0 \leq z \leq n^2$.

Exercice 31 (*) :

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|1 + z + z^2 + \dots + z^9| = 1$ et $|z| = 1$. Montrer que $z^9 = 1$ ou $z^{11} = 1$.