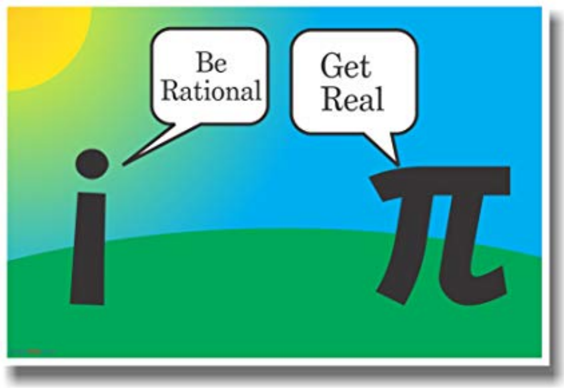
Chapitre 2
Complexes

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

September 19, 2023



La première apparition des nombres complexes est en 1545 dans un livre de Cardan. Pour résoudre une équation de degré 2, il utilise une racine carré d'un nombre négatif, ce qui bien sûr, n'a pas de sens. Il appellera ce genre de nombre, des *nombres sophistiqués*.

En 1572, c'est Raphaël Bombelli qui donne les règles de calculs avec ces nombres. Il en profite pour changer leur nom et les appelle maintenant des *nombres impossibles*. Pour éviter d'avoir à écrire les gênantes racines carré de nombres négatifs, il utilise l'usage encore en vigueur à l'époque de rédiger les mathématiques avec des mots. Aucune racine n'apparaît alors dans le texte. Par exemple, le nombre complexe que l'on note aujourd'hui $2+i\sqrt{121}$ était notée par 2 *piu di meno R.q.* 121.

Ces grandeurs sont alors boudés par une partie de la communauté mathématique de l'époque. Mais devant l'extra-ordinaire efficacité des nombres sophistiqués à régler l'épineuse question d'équations sans solutions, les mathématiciens finissent par s'y intéresser.

C'est René Descartes qui donna toutes ses lettres de noblesses aux nombres complexes en les citant dans ses travaux en 1637, ce qui leur a donné un rang officiel jusque là contesté. Il les nommera *nombres imaginaires*. Et c'est ce terme qui est resté.

C'est Euler qui s'affranchit le premier de la dérangeante notation $\sqrt{-1}$ en le remplaçant par i en 1777. Néanmoins, ce tour de passe-passe ne sera pas suffisant pour créditer les nombres sophistiqués. Ce n'est qu'un jeu de notation qui ne règle pas le fond du problème conceptuel.

En 1799, les nombres complexes finissent d'asseoir leur importance en permettant une démonstration (enfin) rigoureuse du théorème fondamental de l'algèbre (voir le cours sur les polynôme), après plusieurs tentatives de démonstrations infructueuses.

Aujourd'hui, on s'est affranchit largement du délicat problème de la définition de i. En le considérant comme Euler comme la notation de $\sqrt{-1}$ on ne fait que masquer le problème. On utilise quelque chose qui n'a, *stricto sensu*, pas de sens. Mais avec les outils de mathématiques modernes, il est très facile de redéfinir i de façon très rigoureuse et sans ambiguïté.

Dans ce cours, comme nous n'avons pas accès (pas encore) à ces outils, on adoptera un point de vue un peu intermédiaire pour la définition de i.

Par ailleurs, dans ce cours, on mélangera un peu le point de vue algébrique et le point de vue géométrique des complexes. Cette dualité est l'un des très gros avantage des complexes. C'est cette dualité, entre autre, qui rend les complexes si puissants.

> On a pu écrire depuis, que la voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire.
> *Jacques Hadamard*

Contents

1 L'ensemble des nombres complexes, structure et opérations

1.1 Définitions

La définition qui suit est un choix de ma part. Il y a plusieurs façons de définir les complexes. J'ai fais le choix ici de le définir abstraitement, un peu comme sorti d'un chapeau et de reconstruire toutes les propriétés que vous attendez (ce n'est pas la construction de $\mathbb{C}$ la plus satisfaisante, mais elle a l'avantage d'être facilement accessible et de ne nécessité aucun prérequis). Mais dans d'autres sources (dans la littérature par exemple), vous trouverez sans doute une autre définition de $\mathbb{C}$. Dans tous les cas, on aboutit à la même chose. Ça ne change rien. Toutes les définitions de $\mathbb{C}$ sont équivalentes (au sens mathématique du terme).

Certaines remarques faites dans ce cours, et en particulier en tout début de chapitre, font référence aux cours d'algèbre linéaire. Ces remarques paraîtrons donc nébuleuses, voir non pertinentes. Elles le sont. Il faudrait relire ce début de chapitre après avoir fait les cours sur l'algèbre linéaire pour pouvoir les comprendre et les apprécier. Toutes les notions de mathématiques étant imbriquées, il n'est pas possible de rendre compte de leur intrication directement.

Définition 1.1 (L'ensemble $\mathbb{C}$, Forme algébrique d'un complexe) :
L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, i.e.

$$\mathbb{C} = \{a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{C}$ est muni de deux lois deux opérations (deux lois de compositions internes) : l'addition et la multiplication, notées respectivement $+$ et $\times$ comme dans les réels, et qui sont définis par : $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- $(a + ib) \times (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$

La forme $a + ib$ d'un complexe z s'appelle la forme algébrique[a] du complexe z.

[a] On croise aussi parfois le terme *forme cartésienne*, mais c'est plus rare.

On en déduit en particulier que $i^2 = -1$ en prenant dans la multiplication $a = c = 0$ et $b = d = 1$.

Remarque :
i est *un* nombre tel que $i^2 = -1$. Ce n'est pas le seul. Comme nous apprendrons à le faire un peu plus tard, l'équation $x^2 = -1$ a deux solutions. i est l'une des deux racines choisie arbitrairement. On pourrait faire l'autre choix. Ce qui ne changerait rien pour la structure fondamentale de $\mathbb{C}$. On obtiendrait un nouvel ensemble de complexes consistant en tous les conjugués du premier. On échangerait donc un complexe $a + ib$ en son conjugué $a - ib$. Et vice versa.

Proposition 1.1 (Propriétés des opérations sur $\mathbb{C}$) :
Les propriétés des opérations sur $\mathbb{C}$ découlent de celles sur $\mathbb{R}$:

- L'addition est associative, commutative, admet $0 = 0 + 0i$ comme élément neutre et tout complexe z admet un opposé $-z$.
- La multiplication est associative, commutative, admet $1 = 1+0i$ comme élément neutre et tout complexe non nul z admet un inverse $1/z$
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition

Remarque :
Le premier point peut se traduire par "$\mathbb{C}$ est une groupe[1] abélien pour l'addition". Le second point par "$\mathbb{C}^*$ est une groupe abélien pour la multiplication".

Avec ces trois points, on dit que $\mathbb{C}$ est un corps. Comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ qui vérifient les mêmes axiomes et qu'on étudiera en détails un peu plus tard (chapitre Relations d'ordre).

Démonstration :
Les propriétés de l'addition découlent immédiatement de l'addition dans $\mathbb{R}$ d'après la définition de l'addition dans les complexes (qui est donc une "double" addition réelle).

On va montrer seulement les propriétés relatives à la multiplication. Soit $z_1 = a+bi$ et $z_2 = c+di$ deux complexes avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Alors $z_1 \times z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) = (ca - db) + i(da + cb) = (c + id)(a + ib)$. Donc la multiplication est commutative.

Si $z_3 = e+if$ avec $e, f \in \mathbb{R}$, alors $(z_1 \times z_2)z_3 = ((ac-bd)+i(ad+bc))(e+if) = (e(ac-bd) - f(ad+bc)) + i(f(ac-bd)+e(ad+bc)) = (a(ec-fd) - b(ed+fc)) + i(a(fc+ed)+b(ec-fd)) = (a+ib)((ec-fd)+i(ed+fc)) = z_1(z_2z_3)$. Donc la multiplication est associative.

Ensuite $z_1(z_2+z_3) = (a+ib)((c+e)+i(d+f)) = a(c+e)-b(d+f)+i(a(d+f)+b(c+e)) = (ac-bd)+(ae-bf)+i((ad+bc)+(af+be)) = ((ac-bd)+i(ad+bc))+((ae-bf)+i(af+be)) = z_1z_2 + z_1z_3$. Donc la multiplication est distributive à droite sur l'addition et par commutativité, elle est aussi distributive à gauche, donc distributive.

On trouve facilement enfin avec $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$ que l'inverse de $z_1 \neq 0$ est le complexe $\frac{a-ib}{a^2+b^2}$. En effet, si $z_1 \neq 0$, il y a soit a soit b qui est non nul et donc $a^2 + b^2 \neq 0$. □

Remarque :
On remarquera qu'on peut voir $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ en identifiant les réels aux complexes $a + i0$. Les opérations sur $\mathbb{C}$ sont alors le prolongement des opérations de $\mathbb{R}$.

[1] La notion de groupe sera vue dans quelques semaines dans le chapitre éponyme. Les remarques faites dans ce chapitre sur les groupes sont là pour faire des liens avec les chapitres ultérieures et que vous puissiez traduire les propriétés vue ici dans un langage plus "savant". Il faudra donc reprendre ce cours (et les suivants) pour le relire à la lumière des nouvelles notions introduites.

Définition 1.2 (Partie réelle, partie imaginaire, imaginaire pur) :
Soit $z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- Le réel a s'appelle la partie réelle de z, notée $\mathfrak{Re}(z)$
- Le réel b s'appelle la partie imaginaire de z, notée $\mathfrak{Im}(z)$.
- Un complexe de partie réelle nulle est un imaginaire pur, *i.e.* z est imaginaire pur ssi $\mathfrak{Re}(z) = 0$. On note souvent $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires pur dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.2 (Propriétés de $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$ [✓]) :
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\begin{cases} \mathfrak{Re}(\lambda z_1 + z_2) = \lambda\, \mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2) \\ \mathfrak{Im}(\lambda z_1 + z_2) = \lambda\, \mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2) \end{cases}$ [$\mathbb{R}$-Linéarité]

(ii) $\begin{cases} \mathfrak{Re}(z_1 z_2) = \mathfrak{Re}(z_1)\, \mathfrak{Re}(z_2) - \mathfrak{Im}(z_1)\, \mathfrak{Im}(z_2) \\ \mathfrak{Im}(z_1 z_2) = \mathfrak{Re}(z_1)\, \mathfrak{Im}(z_2) + \mathfrak{Im}(z_1)\, \mathfrak{Re}(z_2) \end{cases}$

La partie réelle et la partie imaginaire sont $\mathbb{R}$-linéaires. Ce sont des applications linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ en voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 (voir chapitres sur les espaces vectoriels et les applications linéaires).

Démonstration :
La démonstration se fait par le calcul. Et le calcul d'une somme, d'un produit etc a déjà été fait dans la démonstration de la propriété précédente. □

Exemple :
Écrire sous forme algébrique le complexe $(3 - i)(-1 + 4i)(1 + i)$

Proposition 1.3 (Caractérisation d'un nombre complexe par sa forme algébrique) :
Un nombre complexe est entièrement déterminé par sa partie imaginaire et sa partie réelle, *i.e.*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \left[z = z' \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \\ \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z') \end{cases} \right]$$

Démonstration :
Si l'on prend deux complexes z, z' tel que $z = z'$. On a donc $z - z' = 0 = 0 + 0i$. Donc $\mathfrak{Re}(z - z') = \mathfrak{Re}(z) - \mathfrak{Re}(z') = 0$. D'où l'on déduit $\mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z')$. On procède de la même manière pour la partie imaginaire.

Réciproquement, soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z')$ et $\mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z')$. Alors $z = \mathfrak{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Re}(z') + i\,\mathfrak{Im}(z') = z'$ par définition de l'expression algébrique de z et z'. □

Dans cette démo, on montre que deux complexes sont égaux ssi leurs parties réelles et imaginaires sont égales. Donc un complexe ne peut s'écrire de deux façon différentes sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Sa partie réelle et sa partie imaginaire sont unique pour un complexe donné, autrement dit :

Corollaire 1.4 (Unicité de l'écriture algébrique d'un complexe [✓]) :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ z = a + ib.$$

Définition 1.3 (Géométrie complexe) :
A tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on peut associer le point M de coordonnée (a, b) du plan $\mathbb{R}^2$. Réciproquement, à tout point $M(a, b)$ de $\mathbb{R}^2$, on peut associer le complexe $z = a + ib$.

Le point M est l'image du complexe z. Et le complexe z est l'affixe de M.

On a donc une identification[2] entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. Précisément, cette identification correspond à la bijectivité de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ a + ib & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

A partir de maintenant, on pourra donc passer de la géométrie vectorielle plane (donc dans $\mathbb{R}^2$) aux complexes sans vergogne. Certains problèmes seront d'ailleurs plus facile à résoudre avec un point de vue géométrique et d'autre avec un point de vue complexe.

Remarque :
On remarquera aussi que les opérations sur $\mathbb{C}$ nous permettent, via l'identification $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$, de définir des opérations sur $\mathbb{R}^2$. On a donc l'addition facile $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ coordonnée par coordonnée, et la multiplication $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Ce n'est pas trivial. Normalement, il n'y a pas de multiplication satisfaisante sur $\mathbb{R}^n$. Sauf sur $\mathbb{R}^2$ grâce à la bijectivité entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

[2] Le terme d'*identification* est un mot valise à éviter à tous prix. Il est beaucoup trop vague. Il y a beaucoup de façon de faire des identifications. Faire une identification est, en fait, se munir d'une bijection. Mais toutes les bijections ne sont pas forcément intéressantes. Et selon la bijection que vous considérer, vous n'identifierez pas les même choses. Ce point sera détaillé un peu plus loin dans l'année. Il faut donc, autant que faire ce peu, éviter ce terme et préciser la bijection utiliser. Ici, l'identification se fait grâce à un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

!!! ATTENTION !!!

Ce qui nous intéresse ici, c'est la géométrie vectorielle. On assimile donc un point M du plan avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui lui correspond. On a beau parlé de point M, ce qui nous intéresse réellement, c'est le vecteur $\overrightarrow{OM}$. De sorte que l'on puisse faire des opérations géométriques. Les opérations vectorielles que nous définirons sont en fait des applications qui agissent sur des vecteurs et non pas sur les points. À strictement parlé, on ne peut pas additionner des points. Ça n'a pas de sens. Mais des vecteurs oui. Il faut donc bien garder en tête que ce que l'on considère, c'est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en faisant parfois un abus de langage en faisant un amalgame entre le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Remarque :
On parle de plan complexe quand on identifie les points à leurs affixes, au lieu de parler de plan euclidien dans lequel les points sont décrits par leurs couples de coordonnées. Il y a donc un dictionnaire de traduction de l'un à l'autre selon le monde dans lequel on patauge :

Plan euclidien $\mathbb{R}^2$	$\leftrightsquigarrow$	Plan complexe $\mathbb{C}$
Points / Vecteurs		Affixes
$M(a,b)$		$z = a + ib$

Exemple :
Géométriquement, à quoi correspond l'ensemble des points d'affixe z tel que $\mathfrak{Re}(z) = a$ ou $\mathfrak{Im}(z) = b$ pour des réels a et b fixés ? On exprimera le résultat dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

1.2 Conjugaison

L'opération de conjugaison complexe est une opération spécifique à $\mathbb{C}$. Elle n'a d'intérêt que dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.4 (Conjugaison complexe [✓]) :
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle conjugué de z, noté $\overline{z}$ le complexe $a - ib$.

Proposition 1.5 (Propriétés de la conjugaison [✓]) :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\overline{z + \lambda z'} = \overline{z} + \lambda\overline{z'}$. [$\mathbb{R}$-Linéarité]

(ii) $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$

(iii) $\mathfrak{Re}(\overline{z}) = \mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(\overline{z}) = -\mathfrak{Im}(z)$

(iv) $\overline{\overline{z}} = z$ [Involution]

On peut résumer les deux premiers points en disant que la conjugaison est compatible avec l'addition et la multiplication (ou même mieux encore, que la conjugaison est une application sesquilinéaire, voir espaces hermitien hors-programme).

Démonstration :
La démo est très facile. Il suffit d'écrire les sommes, produits etc et de conjuguer et voir ce que ça donne. Laissé en exercice. □

Proposition 1.6 (Point de vue géométrique de la conjugaison) :
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et M l'image de z dans $\mathbb{R}^2$. Alors l'image de $\overline{z}$ est le point M' image de M par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration :
Il suffit de l'écrire. On a $\overline{z} = a - ib$. Donc son image est le point $(a, -b)$ qui correspond très exactement au symétrique du point $M(a, b)$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. CQFD. □

Proposition 1.7 (Caractérisation des réels et imaginaire purs par la conjugaison [✓]) :
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les relations

$$z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad z - \overline{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$$

et les caractérisations

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \qquad \text{et} \qquad z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$$

Démonstration :
On pourrai prouver cette proposition géométriquement, mais ce qui nécessiterait de faire un dessin, ce qui est compliqué par ordinateur. Par flemme (et surtout par goût), je vous propose une démonstration algébrique. Et pour ce faire, il suffit d'écrire ce qu'il se passe : si $z \in \mathbb{C}$, alors $z + \overline{z} = \mathfrak{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z) = 2\,\mathfrak{Re}(z)$ et de même pour l'autre relation.

On va faire la première des deux caractérisations ici. La deuxième étant sensiblement similaire. On a $z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \iff z = \mathfrak{Re}(z) = \overline{z}$. □

⚠ Attention à ne pas oublier le i dans la différence $z - \overline{z}$. C'est une erreur classique qui gâche tout.

Géométriquement, si M' est le symétrique d'un point M du plan par rapport à l'axe des abscisses, on a clairement $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ sur l'axe des abscisses et de longueurs, deux fois l'abscisse de M. De même avec la différence.

1.3 Module

Définition 1.5 (Module [✓]) :
Soit $z \in \mathbb{C}$. Le module du nombre complexe z, noté $|z|$, est le réel $|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}$.

Proposition 1.8 (Point de vue géométrique du module [✓]) :
Soit $z \in \mathbb{C}$ et M sont image dans le plan.

Alors $|z|$ correspond à la distance OM (*i.e.* à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Démonstration :
Par Pythagore, on a $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} = |z|$ vu que $M(\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z))$. □

On retrouve ici l'abus de langage qui consiste à assimilé un point avec le vecteur canoniquement associé. Je ne le mentionnerai presque plus à partir de maintenant.

Proposition 1.9 (Expression du module par le conjugué [✓]) :
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

et, si $z \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Cette formule est fondamentale. Elle a déjà été démontré sans le dire à la fin de la démonstration de la proposition 1.1.

On notera que pour les réels, la valeur absolue et le module coïncident, *i.e.* si $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on a $|x|_{\mathbb{R}} = |x|_{\mathbb{C}}$. Et c'est tant mieux. C'est la raison pour laquelle la notation est la même. Le module n'est qu'une extension aux complexes de la valeur absolue des réels.

Remarque :
De même que dans $\mathbb{R}$, on peut écrire $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ car par définition, le module est un réel positif et le calcul donne la formule.

Remarque :
Ce résultat permet de pouvoir écrire algébriquement un quotient de complexe. Il permet de "chasser les i qui pourraient se trouver au dénominateur". De sorte que l'on a plus que des réels au dénominateur, ce qui fournit une forme algébrique du quotient.

Exemple :
Écrire sous forme algébrique le complexe $\frac{2+i}{3-4i}$.

Proposition 1.10 (Propriété du module algébrique) :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $|zz'| = |z||z'|$

(ii) Si $z' \neq 0$, alors $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$

(iii) $|z| = |\overline{z}|$

(iv) $|\lambda z| = |\lambda||z|$ (c'est une conséquence du premier point)

(v) $|z| = 0 \iff z = 0$

Démonstration :
Il suffit d'écrire $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Ce qui donne facilement les deux premiers points. Les autres en découlent ou sont presque triviaux. Laisser en exercice. □

Géométriquement, le point (iii) nous dit que que la symétrie par rapport à l'axe des abscisses ne change pas les longueurs (ce que l'on savait déjà), et le point (v) nous dit O est le seul point à distance 0 de O. Tout va bien.

Proposition 1.11 (Comparaison module-partie réelle et imaginaire [✓]) :
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a alors les inégalités :

$$|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z| \qquad \text{et} \qquad |\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$$

Démonstration :
On va faire seulement l'inégalité pour la partie réelle. L'autre inégalité est obtenue de la même manière (à refaire, donc ...)

$$\begin{aligned} |\mathfrak{Re}(z)| &= \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2} \\ &\leq \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} \\ &= |z| \end{aligned}$$

□

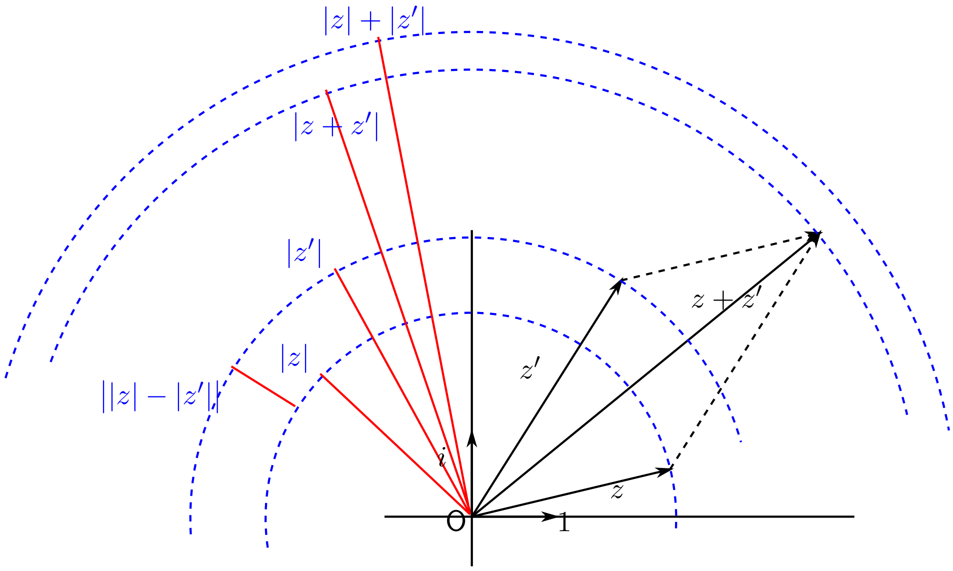
D'un point de vue géométrique, cette propriété est très bête. Elle provient simplement du fait que dans un triangle rectangle, la longueur d'un des côtés de l'angle droit, est plus petite que la longueur de l'hypoténuse. On rappelle que $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ sont les projetés orthogonale (même si on ne sait pas encore ce que ça veut vraiment dire) du point M.

Théorème 1.12 (Inégalité triangulaire et inégalité triangulaire inversée [✓]) :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

et l'inégalité de droite est une égalité ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$.

Vous avez déjà dû croiser des inégalités de ce genre dans $\mathbb{R}$. On a ici la version complexe.



Remarque :
Comme les réels sont des complexes en particulier, ces inégalités peuvent être utilisées aussi avec des réels. Ce sont des valeurs absolues qui interviennent alors et plus des modules. Mais ça fonctionne quand même.

Au passage, on notera la démonstration qui suit fonctionne très bien si z et z' sont des réels. Le vocabulaire devant simplement être adapté en conséquence.

Démonstration :
On a :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z + z'}) \\ &= |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\overline{z}z') + |z'|^2 \\ &\geq |z|^2 - 2|zz'| + |z'|^2 \\ &= (|z| - |z'|)^2 \end{aligned}$$

Mais comme le terme de gauche est un réel positif, on en déduit $|z + z'| \geq ||z| - |z'||$.

On utilise le même genre de technique pour l'inégalité de droite :

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= |z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\overline{z}z') + |z'|^2\\ &\leq |z|^2 + 2|\,\mathfrak{Re}(\overline{z}z')| + |z'|^2\\ &\leq |z|^2 + 2|\overline{z}z'| + |z'|^2\\ &= |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2\\ &= (|z| + |z'|)^2\end{aligned}$$

mais comme les deux termes extrêmes de cette relation sont des réels positifs au carré, on en déduit l'inégalité voulue.

Enfin, l'inégalité de droite se trouve être une égalité dans la démonstration lorsque $\mathfrak{Re}(\overline{z}z') = |\,\mathfrak{Re}(\overline{z}z')| = |\overline{z}z'|$ donc ssi $\mathfrak{Im}(\overline{z}z') = \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Im}(z') - \mathfrak{Im}(z)\,\mathfrak{Re}(z') = 0$, *i.e.* ssi les couples $(\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z))$ et $(\mathfrak{Re}(z'), \mathfrak{Im}(z'))$ sont proportionnels, c-à-d ssi z et z' sont proportionnels. Et cette dernière proposition se traduit très exactement comme dans l'énoncé du théorème. □

On peut bien sûr généraliser par une récurrence facile ce théorème au cas du module de n complexes: $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ (inégalité à connaître également !).

Et géométriquement, cette propriété se traduit par $\|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}\| \leq \|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{OM'}\|$ ce qui est bien connus.

Proposition 1.13 (Cercle et disque) :
Soit $a \in \mathbb{C}$ et A son image dans le plan et $r \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$C(a,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \text{ d'affixe } z, |z-a| = r\}$$

$$D(a,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \text{ d'affixe } z, |z-a| < r\}$$

$$\overline{D}(a,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \text{ d'affixe } z, |z-a| \leq r\}$$

sont respectivement le cercle, le disque ouvert et le disque fermé de centre A et de rayon r.

Démonstration :
C'est évident en se rappelant que $|z-a| = \|\overrightarrow{AM}\|$. □

Remarque :
Le cercle $C(0,1)$ s'appelle le cercle trigonométrique

Exemple :
Déterminer géométriquement les nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1+z$ ont même module.

2 Complexe et trigonométrie

2.1 Groupe $\mathbb{U}$ des complexes de module 1

Définition 2.1 ($\mathbb{U}$) :
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, *i.e.*

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

Proposition 2.1 ($\mathbb{U}$ est un groupe multiplicatif [✓]) :
$\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse, *i.e.* $\forall z, z' \in \mathbb{U}$, $z^{-1} \in \mathbb{U}$ et $zz' \in \mathbb{U}$.
De plus, géométriquement, $\mathbb{U}$ correspond au cercle trigonométrique $C(0, 1)$.

Démonstration :
La démonstration de la stabilité est laissé en exercice. C'est très facile. Presque triviale. Et le point de vue géométrique est évident, par définition. □

Remarque :
D'après les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$, la multiplication complexe restreinte à $\mathbb{U}$ est alors associative, commutative, possède un élément neutre et chaque élément de $\mathbb{U}$ est inversible pour la multiplication. On dit que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif.

Notation ($e^{i\theta}$ [✓]) :
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le complexe $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

⚠ C'est une notation. Le complexe $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ a un sens, il existe et on le note $e^{i\theta}$. Ce n'est qu'une notation, une version raccourcie de ce complexe.

Proposition 2.2 (Propriété algébrique des complexes $e^{i\theta}$ [✓]) :
Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors on a les relations

(i) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{-1}$

(ii) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

(iii) $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$

Démonstration :
Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

On va tout démontrer un peu en même temps. D'abord $\overline{e^{i\theta}} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$. Ensuite $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} = 1$ donc $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Grâce à la proposition 1.9 sur la relation entre module et conjugué, on a $\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Et enfin :

$$\begin{aligned}
e^{i\theta}e^{i\theta'} &= \big(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')\big) + i\big(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')\big) \\
&= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\
&= e^{i(\theta+\theta')}
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque :
Attention ! D'un point de vue logique, pour l'instant, le point (iii) nous dit seulement que $\{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{U}$. On a pas égalité a priori entre les deux ensembles. Du moins pas pour le moment. Il faut encore voir qu'un élément de $\mathbb{U}$ peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$.

Le point (ii) nous fournit également $e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, par une récurrence facile et en utilisant le point (i).

!!! ATTENTION !!!

⚠ On ne peut prendre *QUE* des puissances entières d'un complexes (y compris de $e^{i\theta}$). Seul z^n avec $n \in \mathbb{Z}$ a un sens (et encore, faut il que $z \neq 0$ pour que ça ait un sens si $n < 0$). L'horreur, l'ignominie, l'infamie, le blasphème "$z^{3/4}$" et autres n'ont absolument AUCUN sens. Par exemple, $(-i)^3 = i$ mais comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, on devrait avoir $e^{i\pi/6} = -i$ ce qui est absurde.

Théorème 2.3 (Expression des éléments de $\mathbb{U}$) :
Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $\exists! \theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Démonstration :
Comme $|z| = 1$, l'image M de z est un point du cercle trigonométrique. Donc en coordonnée polaire, le point M est de coordonnée $(1, \theta)$ avec θ unique dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. En repassant en coordonnée cartésienne, on a donc $M(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et en repassant dans les complexes, on a donc $z = e^{i\theta}$. □

Cette démonstration peut se faire par le calcul, mais ce sera fait dans un cadre plus générale un peu plus loin quand on montrera qu'un complexe peut s'écrire sous forme exponentielle.

Attention, il n'y a pas d'intervalle canonique pour déterminer les angles. Les deux qui sont souvent utilisé sont $]-\pi, \pi]$ et $[0, 2\pi[$. Et on a $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[\}$ avec une bijection entre $\mathbb{U}$ et le dernier ensemble.

On notera en particulier :

$$e^{2i\pi} = 1 \qquad \text{et} \qquad e^{i\pi} = -1$$

Exemple :
Soit $z = \frac{1}{4}\Big(\sqrt{6}(1+i) + \sqrt{2}(1-i)\Big)$. Montrer que z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

Exemple :
Soit $a, b \in \mathbb{U}$ avec $a \neq -b$. Montrer que $\frac{1+ab}{a+b} \in \mathbb{R}$.

Remarque :
Comme on vient de montrer que $\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et qu'on a établit les propriétés des nombres $e^{i\theta}$ à la proposition 2.2, on peut donc en déduire les propriétés des éléments de $\mathbb{U}$: $\forall z \in \mathbb{U}$, $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et $\forall z, z' \in \mathbb{U}$, $zz' \in \mathbb{U}$ en particulier.

Proposition 2.4 (Relations d'Euler [✓]) :
$\forall \theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Attention à ne pas oublier le i au dénominateur dans la formule du sinus.

Démonstration :
La démo est facile avec ce qui précède. □

Proposition 2.5 (Formule de Moivre [✓]) :
$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$,
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration :
Je ne vous ferais pas l'affront de faire la démonstration. Trivial (MAIS A SAVOIR JUSTIFIER !!!!) □

Proposition 2.6 (Égalité entre complexes de module 1 [✓]) :
Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a
$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$$

Démonstration :
Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$. Alors

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} = e^{i\theta'} &\iff \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = 1 \\
&\iff e^{i(\theta-\theta')} = 1 \\
&\iff \begin{cases} \cos(\theta-\theta') = 1 \\ \sin(\theta-\theta') = 0 \end{cases} && \text{cf caractérisation des complexes par leur parties réelles et parties imaginaires} \\
&\iff \theta - \theta' \equiv 0 \ [2\pi] \\
&\iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]
\end{aligned}$$

□

Exemple (Formule de l'arc moitié [✓]) :
Soit $t \in \mathbb{R}$. Factoriser $1+e^{it}$ et $1-e^{it}$ et en déduire alors une factorisation de $e^{ia}+e^{ib}$ puis $e^{ia}-e^{ib}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarque :
Dans les identités de l'arc moitié, on voit qu'en prenant les parties réelles et parties imaginaires, on retrouve les formules de factorisation du cosinus et du sinus.

Remarque :
On notera que l'on peut, du coup, également exprimer la fonction $\tan$ en fonction des exponentielles :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tan(t) = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{i(e^{it} + e^{-it})}$$

Il est évident que toutes les formules $\cos p \pm \cos q$, $\cos(a \pm b)$, $\sin p + \pm \sin q$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$, $\cos(p)\cos(q)$ etc sont à connaître ou au moins à savoir retrouver. On rappelle les trois formules que l'on oublie souvent :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin t = \frac{2\tan(t/2)}{1+\tan(t/2)^2}, \quad \cos t = \frac{1-\tan(t/2)^2}{1+\tan(t/2)^2}, \quad \tan t = \frac{2\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)^2}$$

2.2 Applications à la trigonométrie

2.2.1 Linéarisation

Il s'agit d'écrire $\cos^m(\theta)\sin^n(\theta)$ en une combinaison linéaire de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ (donc une somme de ces termes là avec des coefficients constants indépendant de k et θ). Pour se faire, on utilise les formule d'Euler :

$$\cos^m(\theta)\sin^n(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^m \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$$

puis on développe avec le binôme de Newton et on regroupe les termes conjugués en "repliant la somme sur elle même".

Plus précisément, pour la linéarisation, il faut :

- Écrire les sinus ou cosinus avec les formules d'Euler ;
- Développer avec le binôme de Newton ;
- Découper les sommes en deux par la milieu (attention selon s'il y a un nombre de termes pair ou impair) ;
- Replier la fin des indices sur les premiers (*i.e.* opérer un changement d'indice dans la somme de fin en comptant à l'envers pour avoir les même indice que pour les premiers termes) ;

- Tout écrire sous une seule somme ;
- Réutiliser les formule d'Euler mais dans l'autre sens pour faire disparaître les exponentielles.

$$e^{-inx} + e^{-i(n-1)x} + e^{-i(n-2)x} + \dots + e^{i(n-2)x} + e^{i(n-1)x} + e^{inx}$$

Exemple :
Linéariser $\sin^4(\theta)$.

2.2.2 Développement

C'est le processus inverse. Il s'agit d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. On utilise ici Moivre :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

puis on développe avec le binôme de Newton et on utilise la caractérisation des complexes par leur partie réelle et partie imaginaire.

Exemple :
Développer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$.

2.2.3 Sommes trigonométriques

Le but ici est d'avoir des méthodes, des outils pour pouvoir calculer une somme de termes trigonométrique (donc faisant intervenir $\cos$ et $\sin$). Le but est de se ramener à une somme avec des exponentielles complexes dont notre somme de départ serait la partie imaginaire (ou réelle) de la somme avec les exponentielles complexes.

On va traiter un exemple classique (donc à savoir faire) pour voir comment ça se passe :

On note

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta + \phi) \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta + \phi)$$

où $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. On pose alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i(k\theta+\phi)}$$

et on a alors $R_n = \mathfrak{Re}(S_n)$ et $I_n = \mathfrak{Im}(S_n)$ (vous remarquerez la cohérence du choix des notations ....).

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$. Alors on a facilement $R_n = (n+1)\cos\phi$ et $I_n = (n+1)\sin\phi$.
- Si $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. On calcul donc S_n :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{i(k\theta+\phi)} \\
&= e^{i\phi}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= e^{i\phi}\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \\
&= e^{i\phi}\frac{e^{-i(n+1)\theta/2}-e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{-i(n+1)\theta/2}}\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}} \\
&= e^{i\phi}\frac{-2i\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{e^{-i(n+1)\theta/2}}\frac{e^{-i\theta/2}}{-2i\sin(\theta/2)} \\
&= e^{i(\phi+n\theta/2)}\frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\theta/2)}
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit, grâce à la caractérisation des complexes par leur partie réelle et partie imaginaire :

$$R_n = \cos(\phi+n\theta/2)\frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\theta/2)} \quad \text{et} \quad I_n = \sin(\phi+n\theta/2)\frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\theta/2)}$$

Il peut être nécessaire de faire une linéarisation au préalable.

Exemple :

Simplifier $\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)$.

2.2.4 Amplitude et Phase

Proposition 2.7 (Amplitude et phase) :
$\forall a,b,t \in \mathbb{R}$, $\exists A,\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$a\cos(t)+b\sin(t) = A\cos(t-\varphi)$$

Démonstration :

Si $a=b=0$, il suffit de prendre $A=0$ et n'importe quel $\varphi\in\mathbb{R}$. On suppose dorénavant que $(a,b)\neq(0,0)$. On pose $A=\sqrt{a^2+b^2}$. Alors $A\neq 0$. On pose aussi $a'=a/A$ et $b'=b/A$. Alors

$a'^2 + b'^2 = 1$. Donc $\exists \varphi \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} a' = \cos(\varphi) \\ b' = \sin(\varphi) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} a\cos(t) + b\sin(t) &= A\cos(\varphi)\cos(t) + A\sin(t)\sin(\varphi) \\ &= A\cos(t-\varphi) \end{aligned}$$

□

On notera qu'on peut traduire ça sous forme de complexe. Pour $a, b, t \in \mathbb{R}$, on peut écrire $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\varphi)$ avec $A = |a+ib|$ et $\varphi \equiv \arg(a+ib)\ [2\pi]$.

Exemple :

Écrire $\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(3t) - \sin(3t)$ sous la forme d'un seul cosinus.

2.3 Argument

Proposition 2.8 (Forme trigonométrique) :
Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $re^{i\theta}$ où $r = |z| > 0$ et θ un réel défini à 2π près. Cette écriture est la forme trigonométrique (ou exponentielle) de z.

Démonstration :
C'est une application immédiate du paragraphe précédent. Si $z \neq 0$, on a $z = |z|\frac{z}{|z|}$ et $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. □

Attention, dans l'écriture sous forme trigonométrique, il faut que $r > 0$. Ainsi, le complexe $-2e^{i\pi/4}$ n'est pas sous forme trigonométrique. La forme trigonométrique de ce complexe est $2e^{-3i\pi/4}$.

Définition 2.2 (Argument) :
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Un réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé <u>un</u> argument de z, noté $\arg(z)$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ L'argument d'un complexe n'est *PAS* unique. Il y a même une infinité de réel qui conviennent. Si θ est un argument de z, alors tous les réels $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ conviennent aussi. A cause de la 2π-périodicité du $\cos$ et du $\sin$. En revanche, en se donnant un intervalle de longueur 2π qui est choisi comme référence (en général $[0, 2\pi[$ ou $]-\pi, \pi]$), il n'y a alors qu'un unique réel θ dans cet intervalle qui convienne. Ce réel est appelé *argument principal*. Mais ATTENTION ! L'argument principal dépend du choix d'un intervalle de référence. En changeant d'intervalle de référence, on change d'argument principal. Et le passage de l'un à l'autre est donné par un multiple de 2π.

On a donc, si θ_0 est un argument du complexe z, alors l'ensemble des arguments de z est $\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 2.9 (Caractérisation des complexes par les formes trigonométriques) :
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \ [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration :

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z_1| = |z_2|$ et $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \ [2\pi]$. Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi$. On alors facilement $z_1 = |z_1| e^{i\arg(z_1)} = |z_2| e^{i\arg(z_2) + 2ik\pi} = |z_2| e^{i\arg(z_2)} (e^{2i\pi})^k = |z_2| e^{i\arg(z_2)} = z_2$. Donc les deux complexes sont égaux.

$\boxed{\Rightarrow}$ La réciproque est évidente. □

<u>Méthode :</u> Mettre un complexe z sous forme trigonométrique.

1. Si $z = 0$, alors il n'y a rien à faire. On suppose donc que $z \neq 0$.
2. On calcul $|z|$ puis on note $u = \frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.
3. On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} \cos\theta = \mathfrak{Re}(u) = \frac{\mathfrak{Re}(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \mathfrak{Im}(u) = \frac{\mathfrak{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$
On sait qu'il existe des solutions à ce système puisque $\mathfrak{Re}(u)^2 + \mathfrak{Im}(u)^2 = 1$. On en détermine une θ_0 (à l'aide du cercle trigonométrique en général).

4. Si l'on veut un argument principal de z, il faut se fixer un intervalle de référence I de longueur de 2π, typiquement $[0, 2\pi[$ ou $]-\pi, \pi]$. Puis on cherche $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_0 + 2k_0\pi \in I$. Et alors $\theta_0 + 2k_0\pi$ est autre argument de z et c'est l'argument principal de z.

Exemple :
Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

$$1+i, \quad \frac{\sqrt{3}+i}{i-1}, \quad \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2+2i}$$

Exemple :
Calculer α^n pour $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.10 (Argument et opérations) :
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

(i) $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$

(ii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$

(iii) $\arg(\overline{z_1}) \equiv -\arg(z_1)\ [2\pi]$

(iv) $\arg(-z_1) \equiv \arg(z_1) + \pi\ [2\pi]$

(v) $\arg(\lambda z_1) \equiv \arg(z_1)\ [2\pi]$

Démonstration :
La démonstration de ces propriétés vient de l'écriture d'un complexe sous forme trigonométrique car l'argument d'un complexe se lit sur la forme trigonométrique. Laisser en exercice. □

On a aussi, par récurrence facile, $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$.

Proposition 2.11 (Caractérisations des réels et imaginaires purs par l'argument) :
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a
$$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$$
et
$$z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

Démonstration :
Là encore, exercice. □

Remarque (Lien avec les coordonnées polaires) :
Si $z \neq 0$ est l'affixe d'un point $M \neq O$ du plan et si $z = \rho e^{i\theta}$ dans sa forme trigo, alors les coordonnées polaires de M sont (ρ, θ).

Proposition 2.12 (Point de vue géométrique de l'argument) :
Soit $A \neq O$ un point d'affixe $a \neq 0$. Alors $\arg(a)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA})$.
Si B est un autre point différent de O d'affixe b, alors $\arg(b-a)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB})$.

J'appelle $\overrightarrow{e_1}$ le vecteur directeur unitaire de l'axe des abscisses qui va dans le sens des réels positifs et $\overrightarrow{e_2}$ le vecteur directeur unitaire de l'axe des ordonnées qui va dans le sens des parties imaginaires croissantes.

Exemple :
Soit A un point d'affixe a et $\theta \in \mathbb{R}$. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tel que

1. $\arg(z-a) \equiv \theta\ [2\pi]$
2. $\arg(z-a) \equiv \theta\ [\pi]$

Proposition 2.13 :
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectifs z_1 et z_2. Alors $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Démonstration :

On a

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) &\equiv \arg(z_2) - \arg(z_1)\ [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u})\ [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v})\ [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\ [2\pi]\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.14 :
Soit A, B et M trois points distincts d'affixes respectifs a, b, z. Alors $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

Démonstration :
Il suffit d'appliquer la proporiété précédente avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MB}$. □

2.4 Racines n-èmes de l'unité

Définition 2.3 (Racines n-èmes de l'unité [✓]) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ème de l'unité tout complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité.

Il est évident que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Remarque :
Et $(\mathbb{U}_n, \times)$ a une structure de groupe. C'est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Proposition 2.15 (Expression des racines n-ème de l'unité [✓]) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement n racines n-èmes de l'unité qui sont les complexes

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \qquad \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!]$$

i.e.

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

Démonstration :
Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Donc z est un complexe de module 1 et donc z peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} & z^n = 1 \\ \iff & e^{in\theta} = 1 \\ \iff & n\theta \equiv 0 \ [2\pi] \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = 2k\pi \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} & e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}} \\ \iff & \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} \ [2\pi] \\ \iff & k \equiv k' \ [n] \\ \iff & \exists p \in \mathbb{Z}, k' = k + np \end{aligned}$$

Or $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\exists \ell \in [\![0, n-1]\!]$ et $\exists p \in \mathbb{Z}$ tels que $k = \ell + np$. Donc si $z \in \mathbb{U}_n$, $\exists \ell \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $z = \omega_\ell$. D'où $\mathbb{U}_n = \{\omega_\ell, 0 \leq \ell \leq n-1\}$ et donc $\mathbb{U}_n$ contient n éléments. $\square$

Remarque :
On peut en fait remplacer l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$ par n'importe quel ensemble de n entiers sonsécutifs.

Remarque :
Les ω_k sont toutes les puissances de $\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, *i.e.* $\omega_k = \omega_1^k$.

Remarque :
On note souvent $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{2i\pi/3}$. On appelle en général (presque tous le temps) j le complexe $e^{2i\pi/3}$. A ne pas confondre avec le j en physique ou en SI qui est le i complexe mathématique.

Proposition 2.16 (Interprétation géométrique de $\mathbb{U}_n$) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{U}_n$ correspond géométriquement à l'ensemble des sommets du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique et dont l'un des sommet est le point d'affixe 1.

Démonstration :
On va donner seulement les grandes lignes de la preuve. Il n'est pas très dur de la compléter pour la faire correctement.

On appelle M_k le point d'affixe $z_k = e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Alors on remarque que $M_0M_1 = M_1M_2 = \cdots = M_{n-2}M_{n-1} = M_{n-1}M_0$. Ce qui nous dit donc que le polygone $M_0M_1 \ldots M_{n-1}$ est régulier, inscrit dans le cercle trigo et M_0 est le point d'affixe 1. $\square$

Exemple :
Soit $n \geq 1$. Sans calcul, donner le résultat attendu a priori de la somme des racines n-èmes de l'unité, puis la calculer.

Définition 2.4 (Racines n-èmes de a) :
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On appelle racines n-èmes de a tout complexe z tel que $z^n = a$.

Proposition 2.17 (Expression des racines n-ème d'un complexe) :
Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si z_0 est une racine n-ème de a, alors l'ensemble des racines n-ème de a est

$$z_0\mathbb{U}_n = \{z_0\omega, \omega \in \mathbb{U}_n\}$$

Plus particulièrement, si $\rho = |a|$ et θ est un argument de a, alors les racines n-ème de a sont de la forme

$$\rho^{1/n}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad \text{avec } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Démonstration :
La démonstration découle directement de la forme des éléments de $\mathbb{U}_n$ et de la forme trigo du produit de deux complexes. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Le réel $\rho^{1/n}$ peut aussi se noter $\sqrt[n]{\rho}$. Comme c'est un réel *positif*, cette notation a un sens. Autrement, elle n'en a pas. En revanche, on ne JAMAIS écrire $z^{1/n}$ si $z \notin \mathbb{R}_+$. On arrive très vite à une contradiction. Il suffit de prendre $-i$. On $i^3 = -i$ donc a priori $(-i)^{1/3} = i$ mais d'un autre côté $(-i)^{1/3} = e^{i\pi/6}$ et donc on devrait avoir $\cos(\pi/6) = 0$ ce qui est clairement faux. Donc attention ! Les complexes ne prennent QUE DES PUISSANCES ENTIÈRES !

Exemple :
Déterminer les racines 5-ème de -4. Résoudre également dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

3 Équations du second degré

3.1 Racines carrés d'un complexe

Proposition 3.1 (Racines carrées d'un nombre complexe) :
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $z_1^2 = z = z_2^2$ avec $z_1 = -z_2$.

En fait, 0 est le seul complexe dont les deux racines sont confondus (et égales à lui même).

Démonstration :
Soit $z \neq 0 \in \mathbb{C}$. On peut donc écrire $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$. On considère alors le complexe $z_1 = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$ et $z_2 = -\sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$. Alors on facilement $z_1^2 = z_2^2 = z$. □

Attention, dans le démonstration, z_1 est donné sous forme trigonométrique, mais z_2 n'est pas sous forme trigonométrique.

Remarque :
Si $a > 0$, les racines de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Si $a < 0$, les racines de a sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

⚠ Attention ! la notation $\sqrt{z}$ n'a pas de sens si z n'est pas un réel positif.

D'autre part, on vient de voir qu'un complexe non nul a *deux* racines carrées. On ne peut donc pas parler de la mais d'une racine carrée. Il n'y en a pas une qui est meilleure que l'autre ou préférable par rapport à une autre. On ne peut pas les distinguer a priori.

Méthode de calcul des racines carrées d'un complexe non nul : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour trouver les racines de z, il y a deux méthodes :

- Méthode trigonométrique : Comme dans la démo, on écrit z sous sa forme trigonométrique $\rho e^{i\theta}$. Les racines sont alors $\pm\sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$. Mais il faut pouvoir écrire z sous forme trigonométrique et on ne sait pas toujours le faire.

- Méthode algébrique : On considère $z = a + ib$. Si $b = 0$, z est réel et on sait résoudre (voir remarque au dessus). On suppose donc dorénavant $b \neq 0$. On cherche une solution sous la forme $Z = \alpha + i\beta$. On doit donc avoir $Z^2 = z$, ce qui nous donne $|Z|^2 = |z|$. On en extrait donc le informations suivantes

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{modules} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a & \text{parties réelles} \\ 2\alpha\beta = b & \text{parties imaginaires} \end{cases}$$

  En résolvant le système des deux premières équations ci-dessus, on en déduit

$$\begin{cases} 2\alpha^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2\beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a \end{cases}$$

On a bien sûr $\sqrt{a^2+b^2} \geq |a|$ donc $\alpha = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \in \mathbb{R}$ et $\beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \in \mathbb{R}$ pour la même raison que pour α. On a donc 4 couples solutions possible

$$(\alpha, \beta) = \left(\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

Finalement, avec la dernière info que nous n'avons pas utilisé jusque là, on va pouvoir éliminer deux couples en déterminant les signes à choisir : Si on prend la partie imaginaire, on trouve $2\alpha\beta = b$. Donc le produit $\alpha\beta$ doit être du même signe que la partie imaginaire de z. Donc si $b > 0$, alors α et β doivent être de même signe et si $b < 0$, ils doivent être de signes opposés.

Exemple :
Déterminer les racines du complexes $1+i$ par méthode trigonométrique ET par méthode algébrique. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$ et $\tan(\pi/8)$.

Exemple :
Déterminer les racines carrées complexes de $\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

3.2 Résolutions des équations du second degré à coefficients complexes

Proposition 3.2 (Équations du second degré à coefficient réels (Rappels)) :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(ii) Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle double

$$z = \frac{-b}{2a}$$

(iii) Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes distinctes conjuguées

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On ne fait pas la démo. De toutes façons, cette proposition n'est en réalité qu'un corollaire de la proposition suivante, qui, elle, va être démontré.

Proposition 3.3 (Équations du second degré à coefficients complexes) :
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Si $\Delta \neq 0$, l'équation à 2 racines distinctes

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

où $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

(ii) Si $\Delta = 0$, l'équation a une racine double

$$z = -\frac{b}{2a}$$

Remarque :
On notera que le choix de la valeur de δ importe peu puisque les deux racines du trinôme diffèrent justement du signe de δ et les deux racines carrées de Δ sont opposées. Donc faire un autre choix pour δ revient en fait simplement à intervertir les deux racines.

Démonstration :
On va faire en fait la démo seulement des équations à coefficients complexes. Celles des équations à coefficients réelles sera inclus dedans en faisant une distinction de cas.

Première méthode :

Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant la forme canonique, on a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Soit $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carré de $\Delta = b^2 - 4ac$ (donc $\delta^2 = \Delta$). On déduit de ce qui précède :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right) = 0 \\ &\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 && \text{car } a \neq 0 \\ &\iff z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\delta}{2a} && \text{racines carré de } 1 \end{aligned}$$

$$\iff z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

Dans le cas où $\Delta \neq 0$, on a $\delta \neq 0$ et donc on a deux racines distinctes. Et dans le cas où $\Delta = 0$, on a $\delta = 0$. Les deux racines obtenues sont donc confondus. Et

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Donc $\frac{-b}{2a}$ est bien une racine double.

Autre méthode :

Le polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$ est de degré 2, donc il ne peut avoir plus de deux racines dans $\mathbb{C}$ (voir théorème de D'Alembert-Gauss dans le chapitre sur les polynômes). Appelons z_1 et z_2 ses racines (avec possiblement $z_1 = z_2$). Il s'écrira alors sous forme factorisé

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

En développant cette expression et en "identifiant les coefficients", on trouve le système (de relations bien connues) :

$$\begin{cases} -a(z_1 + z_2) = b \\ az_1z_2 = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_1 + z_2 = -b/a \\ z_1z_2 = c/a \end{cases}$$

On remarque de plus que

$$\begin{aligned}(z_1 - z_2)^2 &= z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 \\ &= z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 - 4z_1z_2 \\ &= (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2 \\ &= \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} \\ &= \frac{b^2 - 4ac}{a^2}\end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = \frac{\pm\delta}{a} \\ z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pm\delta}{a} - \frac{b}{a}\right) \\ z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-b}{a} - \frac{\pm\delta}{a}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_1 = \frac{-b+\pm\delta}{2a} \\ z_2 = \frac{-b-\pm\delta}{2a} \end{cases}$$

On trouve donc deux solutions (possiblement égales si $\delta = 0$, i.e. si $\Delta = 0$) qui sont de la forme annoncé. □

Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

Proposition 3.4 (Lien racines/coefficients pour un polynôme du second degré) :
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont solutions de } az^2 + bz + c = 0 \iff \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

La démonstration est incluse dans la démonstration précédente.

Exemple :
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Détermminer les racines de $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.

Cette équation est une équation classique qu'il faut savoir absolument résoudre (et donc connaître les solutions).

4 Exponentielle complexe

Définition 4.1 (Exponentielle complexe [✓]) :
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe de z par :

$$e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)} e^{i\,\mathfrak{Im}(z)}$$

L'exponentielle complexe prolonge donc l'exponentielle réelle puisque elle coïncide sur $\mathbb{R}$ (si $z \in \mathbb{R}$, sa parti imaginaire vaut 0 et l'exponentielle complexe d'un réel est alors bien égal à l'exponentielle réel).

En particulier, dans sa version la plus explicite, on a donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)}(\cos(\mathfrak{Im}(z)) + i\sin(\mathfrak{Im}(z)))$.

Proposition 4.1 (Propriété algébrique de l'exponentielle complexe) :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

1. $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$
2. $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Démonstration :
Il suffit de faire le calcul avec les formes algébriques de z, z' et $z + z'$. □

Remarque :
Donc l'exponentielle complexe est un morphisme de groupe de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Proposition 4.2 (Module et argument de l'exponentielle complexe [✓]) :
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors
$$|e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)} \qquad \text{et} \qquad \arg(e^z) \equiv \mathfrak{Im}(z)\ [2\pi]$$

Démonstration :
Ça vient de la définition de l'exponentielle complexe. □

Proposition 4.3 (Surjectivité de l'exponentielle complexe [✓]) :
Tout nombre complexe non nul admet un antécédent par l'exponentielle complexe, *i.e.* L'application $z \mapsto e^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, *i.e.* $\forall Z \in \mathbb{C}^*$, $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = Z$. Et de plus, elle n'est pas injective : si z_0 est un antécédent de Z par l'exponentielle complexe, alors
$$\{z \in \mathbb{C}, e^z = Z\} = \{z_0 + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration :
Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Dans sa forme trigonométrique, on a $Z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que l'exponentielle est surjective dans $\mathbb{R}$, sont $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a = \rho$. Alors $Z = e^{a+i\theta}$. On pose donc $z = a + i\theta$ et z est un antécédent de Z par l'exponentielle complexe.

Si z et z' sont deux antécédents de Z, alors $e^z = e^{z'} \iff e^{z-z'} = 1 \iff z - z' \equiv 0\ [2i\pi]$. On en déduit le résultat annoncé. □

Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{C}$: $e^z = 1 + i\sqrt{3}$, $e^z + e^{-z} = 1$ et $e^z + e^{-z} = 2i$.

Remarque :
En particulier $e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Remarque :
Dans le cas d'une équation $e^z = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, pour la résoudre, on utilise la caractérisation des complexes par module et argument :

$$e^z = a \iff \begin{cases} e^{\mathfrak{Re}(z)} = |a| \\ e^{i\,\mathfrak{Im}(z)} = e^{i\arg(a)} \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln(|a|) + i\arg(a) + 2ik\pi.$$

5 Complément de géométrie complexe

5.1 Colinéarité, parallélisme, alignement et orthogonalité

Proposition 5.1 (Colinéarité et orthogonalités de vecteurs) :
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ d'affixes respectifs z_1 et z_2. Alors

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ colinéaires} \iff \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}(\text{ si } z_1 \neq 0) \iff \overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}$$

et

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ orthogonaux} \iff \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}(\text{ si } z_1 \neq 0) \iff \overline{z_1}z_2 \in i\mathbb{R}$$

On a bien sûr en plus

$$\overrightarrow{u} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{v} \iff \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}(\text{ si } z_2 \neq 0) \iff z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}$$

et la même version pour l'orthogonalité.

Démonstration :
Supposons que $z_1 \neq 0$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$. En passant aux affixes, ils sont colinéaires ssi $z_2 = \lambda z_1$ d'où $\frac{z_2}{z_1} = \lambda \in \mathbb{R}$ et la première équivalence. Mais dans ce cas, $\overline{z_1}z_2 = \lambda\overline{z_1}z_1 = \lambda|z_1|^2 \in \mathbb{R}$. Et si $\overline{z_1}z_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $z_1\overline{z_2} = \lambda = \overline{z_1}z_2$ donc $\frac{z_2}{z_1} = \overline{\frac{z_2}{z_1}}$ donc le rapport est dans $\mathbb{R}$. D'où la deuxième équivalence.

On procède exactement de la même manière pour l'orthogonalité (laisser en exercice). $\square$

Corollaire 5.2 (Parallélisme et perpendicularité de droites) :
Soit A, B, C, D quatre points du plan d'affixes respectifs a, b, c, d. On suppose $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors

$$(AB) \parallel (CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R} \iff (d-c)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}$$

et

$$(AB) \perp (CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R} \iff (d-c)\overline{(b-a)} \in i\mathbb{R}$$

Démonstration :
On a

$$(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{AB} \text{ colinéaire } \overrightarrow{CD}$$

et la proposition précédente donne le résultat. De même pour l'orthogonalité. □

Proposition 5.3 (Alignement et angle droit) :
Soit A, B, C trois points d'affixes respectifs a, b, c. Alors

$$A, B, C \text{ alignés } \iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}(\text{ si } A \neq B) \iff (c-a)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}$$

et

$$\widehat{BAC} \text{ angle droit } \iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}(\text{ si } A \neq B) \iff (c-a)\overline{(b-a)} \in i\mathbb{R}$$

La même remarque que pour la proposition 5.1 fonctionne toujours. Dans le cas où $A = B$, on change le rapport en $\frac{b-a}{c-a}$.

Démonstration :
On a A, B, C alignés ssi $(AB) \parallel (AC)$ et la proposition précédente termine la preuve. De même pour l'angle droit. □

Exemple :
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $1, z^2$ et z^4 sont alignés.

5.2 Transformations

Une transformation du plan est une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui agit géométriquement sur les points du plan. Elle peut donc se traduire au niveau des affixes des points. C'est donc une application $M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = f(z)$ et f une application de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Proposition 5.4 (Symétrie par rapports aux axes) :

- L'application $z \mapsto \overline{z}$ est la transformation de $\mathbb{C}$ qui associe à un point M d'affixe z son symétrique M' par rapport à l'axe réel.
- L'application $z \mapsto -\overline{z}$ est la transformation de $\mathbb{C}$ qui associe à un point M d'affixe z son symétrique M' par rapport à l'axe imaginaire.

Démonstration :
Il suffit de réutiliser l'analogie $\mathbb{R}^2 \leftrightsquigarrow \mathbb{C}$. On traduit les deux transformations dans $\mathbb{R}^2$ et le tour est joué. $\square$

Proposition 5.5 (Translation) :
Soit A un point du plan complexe d'affixe $a \in \mathbb{C}$. L'application

$$T_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z' = a + z \end{array}$$

est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Démonstration :
Soit M l'image de z et M' celle de z'. On a donc l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z = a$ qui est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$. Donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA}$ d'où $M' = M + \overrightarrow{OA}$ et donc M' est bien le translaté de M par le vecteur $\overrightarrow{OA}$. $\square$

Proposition 5.6 (Rotation) :
Soit A un point du plan complexe d'affixe $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors l'application

$$r_{a,\theta} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta}(z-a)+a \end{array}$$

est la rotation de centre A et d'angle θ.

Démonstration :
Soit M un point d'affixe z et M' sont image par l'application $r_{A,\theta}$ d'affixe z'. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM'}$ est $z'-a = e^{i\theta}(z-a)$. On en déduit que $\|\overrightarrow{AM'}\| = |z-a| = \|\overrightarrow{AM}\|$. Donc M et M' sont sur le même cercle de centre A (ils sont à la même distance de A). Et

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) &\equiv \arg z' - az - a \ [2\pi] \\ &\equiv \theta \ [2\pi]\end{aligned}$$

Donc M' est bien l'image par la rotation de centre A et d'angle θ. □

Proposition 5.7 (Homothétie) :
Soit A un point du plan complexe d'affixe $a \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors l'application

$$h_{A,\lambda} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda(z-a)+a \end{array}$$

est l'homothétie de rapport λ de centre A.

Démonstration :
Soit M un point d'affixe z et M' son image par $h_{A,\lambda}$ d'affixe z'.

Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM'}$ est $z'-a = \lambda(z-a)$. On a donc $\|\overrightarrow{AM'}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{AM}\|$. Et comme $\lambda \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires, donc les points sont alignés. Donc M' est bien l'image par l'homothétie de centre A et de rapport λ du point M. □

Attention ! Si $\lambda < 0$, les points M, A, M' sont alignés dans cet ordre. C'est à dire que M' "passe de l'autre côté de A". Mais si $\lambda \geq 0$, le point M' "reste du même côté que M de A".

Proposition 5.8 (Similitude (HP)) :
Soit Ω un point d'affixe ω et $a \in \mathbb{C}$. Alors l'application

$$s_{\omega,a} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a(z-\omega)+\omega \end{array}$$

est la composé d'une rotation d'angle $\theta = \arg(a)$ et de centre Ω avec une homothétie de rapport $|a|$ et de centre Ω, *i.e.* $s_{\omega,a} = r_{\omega,\arg(a)} \circ h_{\omega,|a|}$.

Définition (HP) 5.1 (*Similitude*)

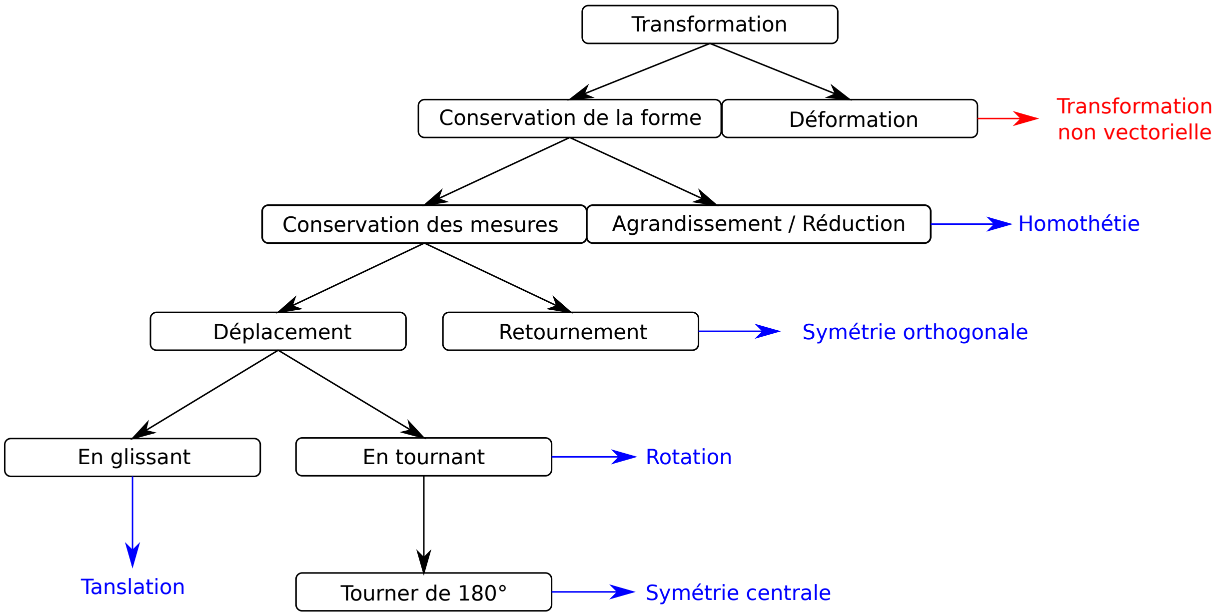
La composé d'une rotation et d'une homothétie de même centre s'appelle une similitude.

Proposition 5.9 (Reconnaître une transformation) :
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = az + b$.

1. Si $a = 1$ alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ avec B le point d'affixe b.
2. Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ alors f est la rotation d'angle $\arg(a)$ et centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$
3. Sinon, f est la similitude de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$. Donc $f = r_{\Omega,\arg(a)} \circ h_{\Omega,|a|}$.

Démonstration :
Il suffit d'identifier les deux formes $az + b$ avec $a(z-\omega)+\omega$. $\square$

Nous verrons la liste des transformations vectorielles qui sont au programme. Il faut savoir reconnaître une transformation vectorielle quand on en croise une. Pour le moment, on peut déjà donner la méthode de classification suivante.


Transformation
Conservation de la forme
Déformation
Transformation non vectorielle
Conservation des mesures
Agrandissement / Réduction
Homothétie
Déplacement
Retournement
Symétrie orthogonale
En glissant
En tournant
Rotation
Tanslation
Tourner de 180°
Symétrie centrale