DM 1
Calculs Algébriques

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 26 Septembre 2023

Problème 1 :
(Les questions sont indépendantes)

1. On veut donner une expression simple de
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{2k}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
   $$T_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1} \qquad \text{et} \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k}.$$
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n + T_n = 2^{2n-1}$ et $U_n - T_n = 0$.
   (b) Établir une expression simple de U_n et T_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Établir une relation simple entre T_n et S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = n4^{n-1}.$$

2. On veut donner une expression simple de
$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\binom{n+2}{k+2}.$$
   (b) En déduire alors une expression simple de S'_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Problème 2 (Double somme binomiales) :
On définit la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ par

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \\ \forall n \geq 4,\ a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \end{cases}$$

On admet que $\forall n \geq 2$, $1 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} a_j = n!$.

1. On fixe $n \geq 2$. On va, dans cette question, "renverser" la somme précédente, c'est-à-dire qu'on va essayer d'exprimer les a_n en fonction de $n!$.
   (a) Montrer que $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k} = -n(-1)^{n-1} - (-1)^n$.
   (b) Montrer que $\forall i, j \in \{2, \ldots, n\}$ avec $j \leq i$, on a $\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}$
   (c) En déduire $\forall j \in \{2, \ldots n\}$, $\sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j < n \end{cases}$.
   (d) En déduire que $\sum_{i=2}^{n} \left(\binom{n}{i}(-1)^{n-i} \sum_{j=2}^{i} \binom{i}{j} a_j \right) = a_n$.
   (e) Conclure que $a_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k} k!$.
2. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\forall n \geq 2$, $a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
3. Montrer que cette expression de a_n vérifie bien la relation de récurrence de la définition de la suite (a_n).