



Interrogation 1

Logique et Rappels

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Contraposée de l'implication $P \implies Q$.

La contraposée de l'implication $P \implies Q$ est

$$(\neg Q) \implies (\neg P)$$

2. Réciproque de l'implication $P \implies Q$.

La réciproque de $P \implies Q$ est $Q \implies P$

3. Négation de l'implication $P \implies Q$.

$$\neg(P \implies Q) \iff (P \wedge (\neg Q))$$

4. Loi de Morgan.

Soit P et Q deux assertions logiques. Alors

$$\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$$

et

$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire en maths la phrase suivante :

La fonction f est croissante et positive.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies 0 \leq f(x) \leq f(y)$$

6. Nier la phrase suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } \forall z \in \mathbb{R}, x + y \leq z$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x + y > z$$

7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la contraposée de :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y) \implies x > y$$

8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la négation de :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ t.q. } \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ t.q. } \forall \eta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la négation de :

$$\exists \lambda \geq 0, \text{ t.q. } \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|.$$

$$\forall \lambda \geq 0, \exists x, y \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } |f(x) - f(y)| > \lambda|x - y|$$

10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire en maths la phrase :

f n'est pas strictement décroissante.

$$\exists x, y \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } x < y \text{ et } f(x) \leq f(y)$$