Chapitre 3 - TD :
Ensembles, Applications et Relations d'équivalence

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

26 septembre 2023

1 Ensembles

Exercice 1 :
Soit E un ensemble et $A, B, C \subset E$. Parmi les assertions ci-dessous, déterminer puis démontrer celles qui sont vraies (sinon, donner un contre-exemple)

1. Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $(A \cup B) \subset C$
2. $A \cap (B \cup C) = A \cap B \implies A \cap C = \emptyset$
3. $A \cap B = A \cup B \implies A = B$
4. Si $A \subset \overline{B \cup C}$ alors $\overline{B} \cup \overline{C} \subset A$.

Exercice 2 :
Soit $A, B, C \subset E$.

1. Montrer $A \subset B \iff A \cup B = B$
2. Montrer que $A = B \iff A \cup B = A \cap B$.
3. Montrer que $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$
4. Montrer $\left\{ \begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array} \right. \iff B = C$.
5. Établir $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
6. Justifier $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$

Exercice 3 (Différence symétrique (*) [✓]) :
Soit E un ensemble. On définit la différence symétrique Δ sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Montrer que $\forall A, B \subset E$, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. En vous aidant des exercices précédents, montrer que
$$\forall A, B \subset E,\ A \Delta B = A \cap B \iff A = B = \emptyset\,.$$
3. De même, montrer $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta B = A \Delta C \iff B = C$

Exercice 4 :
Soit E un ensemble et $F, G \subset E$.

1. Comparer (au sens de $\subset$ et/ou $\supset$) les ensembles $\mathcal{P}(F \cup G)$ et $\mathcal{P}(F) \cup \mathcal{P}(G)$ et les ensembles $\mathcal{P}(F \cap G)$ et $\mathcal{P}(F) \cap \mathcal{P}(G)$.
2. Donner une CNS (condition nécessaire et suffisante) sur F et G pour que $\mathcal{P}(F \cup G) = \mathcal{P}(E)$.
3. De même pour $\mathcal{P}(F) \cup \mathcal{P}(G) = \mathcal{P}(E)$.

Exercice 5 (Équations ensembliste (*)) :
Soit $A, B \subset E$. Discuter et résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

1. $A \cup X = B$
2. $A \cap X = B$

Exercice 6 (Produits cartésiens) :

1. Soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5\}$ et $C = \{2, 10\}$. Expliciter les produits cartésiens $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$, $(A \cap C) \times B$ et $(A \times B) \cap (C \times B)$. Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser le résultat ? Énoncer un résultat analogue avec les symboles $\cup$ et $\times$.
2. Soit les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $I = [0, 3]$, $J = [0, 4]$, $K = [1, 4]$ et $L = [1, 5]$. Dessiner dans le plan ramené au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ les ensembles $I \times J$ et $K \times L$. Déterminer $(I \times J) \cap (K \times L)$.
3. Pour des sous-ensembles quelconques X, Y, Z et T d'un ensemble E, déterminer, en justifiant, $(X \times Y) \cap (Z \times T)$.
4. Montrer, en donnant un contre-exemple, que $(X \times Y) \cup (Z \times T)$ n'est pas toujours un produit cartésien.
5. Que vaut $\emptyset \times X$?
6. Résoudre l'équation $X \times Y = \emptyset$ en X et Y.

2 Applications

Exercice 7 ([✓]) :
Soit $f : E \to F$ et $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $X, Y \subset F$. Montrer

1. f injective ssi $(\forall A, B \subset E,\ A \subset B \iff f(A) \subset f(B))$
2. f surjective ssi $(\forall X, Y \subset F,\ X \subset Y \iff f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y))$
3. f injective ssi $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f surjective ssi $\forall X \subset F,\ f(f^{-1}(X)) = X$.
5. f injective ssi $\forall A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
6. f bijective ssi $\forall A \subset E,\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ (Attention : le complémentaire ne se fait pas par rapport au même ensemble ! !)

Exercice 8 :
Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. Donner des conditions sur E et A pour que $\mathbb{1}_A$ soit une bijection.

Exercice 9 :
On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Sans utiliser de dérivation, étudier f et déterminer un intervalle sur lequel f est bijective, puis déterminer sa bijection réciproque sur cet intervalle.

Exercice 10 :
Soit les fonctions

$$f \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x + 2 \end{array} \quad \text{et} \quad g \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 4 \end{array}$$

Donner les expressions de $f \circ g$, $g \circ f$ et fg.

Exercice 11 :
Soit f et g les applications de $[0,1]$ dans lui même définis par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \\ 3x - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Les applications f et g sont-elles surjectives ? injectives ?
2. Décrire $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 12 ([✓]) :
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer les implications suivantes :

1. $g \circ f$ injective et f surjective $\implies$ g injective
2. $g \circ f$ surjective et g injective $\implies$ f surjective

Exercice 13 :
Soit E, F, G trois ensembles.

1. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$. Montrer $f \circ g \circ f$ bijective $\implies$ f et g bijectives.
2. Soient $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective, alors $f_1 = f_2$.
3. Soient $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$. Montrer que si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ et f surjective, alors $g_1 = g_2$.

Exercice 14 :
Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$.

Montrer que si $h \circ g \circ f$ est injective et $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 15 :
Soit $A, B \subset E$. On note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

À quelles conditions sur A et B l'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 16 (Corollaire du TVI [✓]) :
Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone sur I, alors f est injective.

C'est ce qu'on appelait en terminale, jadis, le Théorème de la bijection...

Exercice 17 (Théorème de Cantor (*)) :
Si E est un ensemble, montrer qu'il n'existe aucune surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Indic : *Considérer* $A = \{a \in E,\ a \notin f(a)\}$.

3 Relations d'Équivalence

Exercice 18 :

1. Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$: $A \sim B \iff A = B$ ou $A = \overline{B}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. On définit sur $\mathbb{Z}$: $x \sim y \iff x + y$ pair. Montrer que c'est une relation d'équivalence et donner ses classes d'équivalences.

Exercice 19 :
On définit sur $\mathbb{R}$ la relation

$$x \sim y \iff x^2 - y^2 = x - y$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$. Combien cette classe contient-elle d'éléments ?

Exercice 20 ([✓]) :
Montrer que la relation $\sim$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \sim y \iff xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Déterminer le nombre d'élément de la classe d'équivalence de x, suivant les valeurs de x.

Exercice 21 :

1. Soit E un ensemble non vide et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{E} \subset \mathcal{P}(E)$ des classes d'équivalences forment une partition de E.
2. Inversement, montrer que si les éléments de $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(E)$ forment une partition de E, alors on peut définir une relation d'équivalence $\approx$ dont les classes d'équivalences sont les éléments de $\mathfrak{A}$.

Exercice 22 :
Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une bijection. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par

$$x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbb{Z},\ f^n(x) = y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que si C est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$, alors $f(C) = C$.
3. Montrer que si un sous-ensemble non vide X de E tel que $f(X) = X$, alors il est réunion de classes d'équivalences de $\mathcal{R}$.

Exercice 23 (*) :
Soit E un ensemble non vide et $\Phi \subset \mathcal{P}(E)$ tel que $\forall A, B \in E$, $\exists X \in \Phi$, $X \subset (A \cap B)$. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation

$$A \sim B \iff \exists X \in \Phi, X \cap A = X \cap B$$

Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$. Quelles sont les classes d'équivalences de $\emptyset$ et de E ?