DM 1

Calculs Algébriques

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 26 Septembre 2023

Problème 1 :

1. (a) On a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n + T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1} \\ &= \sum_{\substack{0\leq k\leq 2n-1 \\ k \text{ pair}}} \binom{2n-1}{k} + \sum_{\substack{0\leq k\leq 2n-1 \\ k \text{ impair}}} \binom{2n-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \\ &= (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1},\end{aligned}$$

par le binôme de Newton. De même, on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n - T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1} \\ &= \sum_{\substack{0\leq k\leq 2n-1 \\ k \text{ pair}}} (-1)^k \binom{2n-1}{k} + \sum_{\substack{0\leq k\leq 2n-1 \\ k \text{ impair}}} (-1)^k \binom{2n-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (-1)^k \\ &= (1-1)^{2n-1}\end{aligned}$$

en utilisant encore le binôme de Newton.

(b) On a donc le système

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} U_n + T_n = 2^{2n-1} \\ U_n - T_n = 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit facilement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = 2^{2n-2} = 4^{n-1} \qquad \text{et} \qquad T_n = 4^{n-1}.$$

(c) Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{2k}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2k \times \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{(2k-1)!(2n-2k)!}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2n(2n-1)!}{(2k-1)!(2n-2k)!}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{2k-1}\\ &= nT_n.\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = n4^{n-1}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)(k+2)k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k+2)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)(k+2)!(n+2-k-2)!}\\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\binom{n+2}{k+2}.\end{aligned}$$

(b) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}S'_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}\\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}\\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{j=2}^{n+2}\binom{n+2}{j} && \text{chgt var } j = k+2\\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}(2^{n+2}-n-2-1) && \text{Binôme de Newton}\\ &= \frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

Problème 2 (Doubles sommes binomiales) :

1. Soit $n \geq 2$.

   (a) Il suffit de calculer

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} - (-1)^n - n(-1)^{n-1} \\ &= (1-1)^n - (-1)^n - n(-1)^{n-1} && \text{Newton} \\ &= -n(-1)^{n-1} - (-1)^n.\end{aligned}$$

   (b) Soit $i, j \in \{2, \ldots, n\}$, avec $j \leq i$. Alors

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \frac{n!i!}{i!(n-i)!j!(i-j)!} = \frac{n!}{(n-i)!j!(i-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(n-i)!(i-j)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}.$$

   (c) On a d'abord $\sum_{i=n}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{n}(-1)^{n-i} = 1$. Et si $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} &= \sum_{i=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-i}(-1)^{n-i} && \text{cf 1.(b)} \\ &= \binom{n}{j}\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{n-i}(-1)^{n-i} \\ &= \binom{n}{j}\sum_{k=1}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^{k} && \text{chgt indice } k = n-i \\ &= \binom{n}{j}(1-1)^{n-j} && \text{Newton} \\ &= 0\end{aligned}$$

   On vient donc de montrer que

$$\forall j \in \{2, \ldots, n\},\ \sum_{i=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} = \begin{cases}1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

   (d) Là encore, il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n}\left(\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=2}^{i}\binom{i}{j}a_j\right) &= \sum_{2 \leq j \leq i \leq n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}a_j \\ &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}a_j \\ &= \sum_{j=2}^{n}\left(a_j\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-1}\right) \\ &= a_n && \text{cf 1.(c)}\end{aligned}$$

   (e) Là encore, ce n'est que du calcul :

$$\begin{aligned}&n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k! \\ =&n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(1 + \sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}a_j\right) && \text{cf énoncé}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=2}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{j} (-1)^{n-k} a_k \\
&= a_n \qquad \text{cf 1.(a) et 1.(d)}
\end{aligned}
$$

2. Enfin,

$$
\begin{aligned}
\forall n \geq 2,\ a_n &= n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! \qquad \text{cf 1.(e)} \\
&= n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= n(-1)^{n-1} + (-1)^n + n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= n(-1)^{n-1} + (-1)^n + n! \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} \qquad \text{chgt indice } \ell = n-k \\
&= n! \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + n! \frac{(-1)^n}{n!} + n! \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} \\
&= n! \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}
\end{aligned}
$$

3. On va maintenant vérifier que cette expression de (a_n) vérifie toujours la relation de récurrence.

$$
\begin{aligned}
\forall n \geq 4,\ (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) &= (n-1)\left((n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= (n-1)(n-2)! \left((n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= (n-1)! \left(n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= (n-1)! \left(n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) \\
&= (n-1)! \left(n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + n\frac{(-1)^n}{n!}\right) \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= a_n
\end{aligned}
$$