DS 2
Calculs - Complexes

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 4 Octobre 2022

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Homographies sur les complexes de module 1) :

Partie I : Une équations dans $\mathbb{U}$

Soit $n \geq 2$ et $\beta = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n + 1 = 0$.
2. Calculer $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{2k+1}$.
3. On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta^{2k+1}$. Calculer $|P_n|$.
4. Soit $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k+1}$. Développer et simplifier $(1-\beta^2)T_n$. En déduire une expression de T_n puis que $T_n \in i\mathbb{R}$.
5. Soit $x \in]0, 2\pi[$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression simple des sommes
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kx) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kx).$$
6. On suppose $n \geq 2$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
   (a) Montrer que $S_n = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$.
   (b) En déduire la valeur de $\tan(\pi/8)$.
   (c) Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$. (On rappelle $\lim_{t\to 0} \frac{\tan(t)}{t} = 1$)

Partie II : Cosinus

L'objectif de cette partie est de calculer $\cos(\frac{\pi}{5})$.

7. Résoudre l'équation $z^5+1=0$ dans $\mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme trigonométrique.
8. Montrer qu'il existe une fonction polynomiale Q telle que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^5+1=(z+1)Q(z).$$
9. Résoudre l'équation $Q(z)=0$ en utilisant le changement de variable $Z=z+\frac{1}{z}$.
10. Déterminer l'expression de $\cos(\pi/5)$ à l'aide de racines carrées.

Partir III : Homographies conservant $\mathbb{U}$

On appelle homographie toute application h pour laquelle il existe $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tels que $ad-bc \neq 0$ et tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz+d \neq 0$, on ait
$$h(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

11. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h_θ l'homographie définie par $h_\theta(z)=\frac{e^{i\theta}}{z}$ pour tout $z \neq 0$. Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{U},\ h_\theta(z) \in \mathbb{U}.$$
12. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par
$$h(z)=e^{i\theta}\frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}.$$
   (a) Vérifier que h est bien une homographie et que h est bien définie sur $\mathbb{U}$.
   (b) Montrer que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

   Réciproquement, nous allons montrer que les seules homographies conservant $\mathbb{U}$ sont des formes des questions 11 et 12 précédentes. Nous allons avoir besoin de quelques résultats techniques pour commencer.
13. Résultats techniques.
   (a) Établir que
$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ |\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2+2\,\mathfrak{Re}(\overline{\alpha}\beta).$$
   (b) Soit $a,b \in \mathbb{C}$. Montrer
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ a+2\,\mathfrak{Re}(be^{-i\theta})=0 \implies a=b=0.$$
14. Soit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tels que $ad-bc \neq 0$ et $|c| \neq |d|$ et soit h l'homographie définie sur $\mathbb{U}$ par $h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ et vérifiant $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
   (a) Montrer que
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |a|^2+|b|^2+2\,\mathfrak{Re}(\overline{a}be^{-i\theta})=|c|^2+|d|^2+2\,\mathfrak{Re}(\overline{c}de^{-i\theta})$$
   en utilisant le fait que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
   (b) En déduire que $|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2$ et $\overline{a}b=\overline{c}d$.
   (c) On suppose dans cette question que $a=0$. Montrer alors que l'homographie h est de la forme de la question 11.
   (d) On suppose désormais que $a \neq 0$. Établir que $(|a|^2-|c|^2)(|a|^2-|d|^2)=0$.
   (e) Montrer qu'on ne peut pas avoir $|a|=|c|$ puisque $ad-bc \neq 0$.
   (f) Montrer que le cas $|a|=|d|$ conduit à une homographie du type de la question 12.
   (g) Conclure.

Problème 2 (Sommes de puissances d'entiers consécutifs) :
Pour tout $n, d \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n(d) = \sum_{k=0}^{n} k^d$$

1. Préciser la valeur $S_0(d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer les valeurs de $S_n(0)$ et $S_n(1)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. On cherche ici à exprimer $S_n(p)$ en fonction de n sans recourir à la résolution d'un système.
   (a) Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, exprimer la somme $A_n(p) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{p+1}$ en fonction des $S_n(j)$ pour $j \in [\![0, p+1]\!]$.
   (b) Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A_n(p) = S_m(p+1)$ (on précisera l'entier m en fonction de n).
   (c) En déduire alors que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ S_n(p) = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i}S_n(i)\right).$$

   (d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

   (e) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(4) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Exercice 3 (BONUX) :
Cet exercice est hors barème. Il ne doit être abordé que si 75% du sujet a été traité.

Soit $m \in \mathbb{C}$ et a, b les racines de $z^2 + 2mz + 1$. Montrer que

$$|a| + |b| = |m-1| + |m+1|.$$