NOM :
Prénom :

Mardi 10 Octobre 2023

Lycée Loges

Interrogation 4

Ensembles, Application, Relations d'Équivalence

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de l'inclusion.

Soit E, F deux ensembles. On note $E \subset F$ l'inclusion de E dans F et par définition

$$E \subset F \iff \forall x \in E,\ x \in F.$$

2. Caractérisation de l'injectivité.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$. f est injective $\iff$ $[\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y]$ $\iff$ $[\forall x, y \in E,\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y)]$

3. Définition de l'image directe et réciproque d'un ensemble.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$. Soit $A \subset E$, $X \subset F$. On note $f(A)$ l'image directe de A par f et $f(A) = \{f(a),\ a \in A\}$. On note $f^{-1}(X)$ l'image réciproque de X par f et $f^{-1}(X) = \{x \in E,\ f(x) \in X\}$.

4. Définition d'une relation d'équivalence.

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si :

- $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$ (réflexivité)
- $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ (symétrie)
- $\forall x, y, z \in E,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ (transitivité)

5. Composée de bijections.

Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ sont bijectives, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

6. Caractérisation de la bijectivité.

Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$. f est bijective, ssi $\forall y \in F, \exists! x \in E,\ f(x) = y$, ssi $\exists g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, ssi f est injective et surjective.

7. Définition d'une application.

Soit E, F deux ensembles. $f : E \to F$ est une application (bien définie) si $\forall x \in E, \exists! y \in F$ tel que $f(x) = y$.

8. Définition d'une bijection.

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$. f est une bijection ssi $\forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 2 :
Soit E, F, G trois ensembles. Soit $f : F \to E$ et $g : G \to E$. On pose $h : F \times G \to E \times E$ définit par $\forall (x, y) \in F \times G$, $h(x, y) = (f(x), g(y))$. Montrer que h est surjective si, et seulement si, f et g sont surjective.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose h surjective. Soit $x, y \in E$. Donc $(x, y) \in E^2$. Par surjectivité de h, $\exists (a, b) \in F \times G$ tel que $h(a, b) = (x, y)$. Et donc, par définition de h, $(f(x), g(y)) = (a, b)$. Puis, par définition de l'égalité dans un produit cartésien, $f(x) = a$ et $g(y) = b$. D'où f et g sont surjectives, par caractérisation de la surjectivité.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f et g surjective. Soit $(a, b) \in E^2$. Par surjectivité de f et g, $\exists x \in F$ et $\exists y \in G$ tel que $f(x) = a$ et $g(y) = b$. D'où, par définition de h, $h(x, y) = (f(x), g(y)) = (a, b)$. Et bien sûr, $(x, y) \in F \times G$. Donc, par caractérisation de la surjectivité, h est surjective.